DAS FADENPENDEL,

EINE ERWEITERTE DARSTELLUNG DER PENDELBEWEGUNG.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE

BEI DER

PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT DER UNIVERSITÄT ZU MARBURG,

EINGEREICHT

VON

AUGUST HOSSFELD,

ORD. LEHRER AM REALPROGYMNASIUM ZU HOFGEISMAR.

MARBURG 1889.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554034_0076

Das Fadenpendel,

eine erweiterte Darstellung der Pendelbewegung.

Sieht man von dem Widerstand der Luft ab, so bewegt sich ein materieller Punkt, wenn ihm durch einen Anstoss eine Geschwindigkeit in bestimmter Richtung erteilt wird, unter dem Einfluss der Schwerkraft in einer Parabel. Ist nun derselbe durch einen unausdehnbaren Faden (vollkommen biegsame, gewichtslose Linie) mit einem festen Punkt verbunden, so hört seine Bewegung in der Parabel auf, sobald er vom festen Punkt eine Entfernung gleich der Länge des Fadens erreicht hat. Die Geschwindigkeitskomponente in der Richtung des Fadens wird durch die Festigkeit des Fadens vernichtet, und die darauf senkrecht gerichtete Komponente stellt die Anfangsgeschwindigkeit der folgenden Bewegung dar. Diese geht unter der Bedingung vor sich, dass die Entfernung des materiellen Punktes von dem festen Punkte nicht grösser als die Länge des Fadens sein kann; sie stellt also die Bewegung des Pendels dar, solange die Entfernung gleich der Länge des Fadens bleibt. Da aber die Verbindung mit dem festen Punkt durch den Faden keine starre ist und die Entfernung des materiellen Punktes von dem festen auch wieder kleiner werden kann als die Fadenlänge, so kann in dieser Hinsicht die Pendelbewegung auch in einem weiteren Sinne betrachtet werden, was in dem Folgenden geschehen soll.

I. Teil.

Zunächst sei die Annahme gemacht, dass der materielle Punkt, dessen Masse gleich der Einheit sei, einen Anstoss in der durch ihn und den festen Punkt gehenden Vertikalebene erhalten hat (ebenes Pendel), darauf möge im zweiten Teil die Untersuchung auf das sphärische Pendel ausgedehnt werden.

1. Bewegung auf dem Kreise. Einfaches Pendel.

Nimmt man den festen Punkt als Pol, die Vertikale durch denselben in der Richtung der Schwere als Polaraxe, bezeichnet man ferner die Beschleunigung der Schwere mit g, die Länge des Fadens mit l, den Polarwinkel mit ϑ und mit ϑ_0 denjenigen Polarwinkel, mit welchem der bewegte Punkt in die Peripherie des Kreises trifft, so gilt bei abnehmendem Polarwinkel für die Pendelbewegung die Differentialgleichung:

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - \frac{l\, d^2\, \vartheta}{d\, t^2} = g \sin \vartheta,$$

deren erstes Integral

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots v^2 = v_0^{\,2} + 2\, gl \cos \vartheta - 2\, gl \cos \vartheta_0$$

ist, wenn v_0 die Anfangsgeschwindigkeit der Pendelbewegung darstellt. Aus der Gleichung geht hervor, dass die Geschwindigkeit v für den Polarwinkel $-\vartheta$ dieselbe ist wie für ϑ, d. h. in

entsprechenden Punkten der Halbkreise zu beiden Seiten der Polaraxe; ferner, dass sie beim Niedergang des beweglichen Punktes bis zum tiefsten Punkt zunimmt, beim Aufsteigen bis zum höchsten Kreispunkt abnimmt. Das Maximum der Geschwindigkeit wird im tiefsten Punkt des Kreises, wo $\vartheta = 0$, das Minimum in dem höchsten Punkt erreicht, wo $\vartheta = \mp \pi$ und $v^2 = v_0^2 - 2\,gl\,cos\,\vartheta_0 - 2\,gl$. Allein es ist nicht ausgeschlossen, dass $v_0^2 - 2\,gl\,cos\,\vartheta_0 < 2\,gl$ wäre, alsdann würde der höchste Punkt des Kreises nicht auch der höchste Punkt der Pendelbewegung sein.

Als zweite Bewegungsgleichung ergiebt sich aus (2), da $v = -l\frac{d\vartheta}{dt}$,

$$(3) \quad \ldots\ldots\ldots \quad t = -l\int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\sqrt{v_0^2 + 4\,gl\,sin^2\frac{\vartheta_0}{2} - 4\,gl\,sin\frac{^2\vartheta}{2}}},$$

worin die Zeit vom Anfang der Bewegung im Kreise gerechnet wird.

Bei der Integration müssen drei Fälle,

$$v_0^2 + 4\,gl\,sin\frac{^2\vartheta_0}{2} \gtreqless 4\,gl,$$

unterschieden werden, von denen der mittlere als Grenzfall der beiden anderen betrachtet werden kann.

Erster Fall: $v_0^2 < 4\,gl\,cos\frac{^2\vartheta_0}{2}$.

Die Integration ergiebt

$$t = k\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot F\left(\frac{1}{2}\vartheta_0, k\right) - k\sqrt{\frac{l}{g}}\,F\left(\frac{1}{2}\vartheta, k\right); k^2 = \frac{4\,gl}{v_0^2 + 4\,gl\,sin\frac{^2\vartheta_0}{2}} < 1.$$

Bezeichnet man die Zeit bis zum tiefsten Punkt, wo $\vartheta = 0$, mit t_1, so ist $t_1 = k\sqrt{\frac{l}{g}}\,F\left(\frac{1}{2}\vartheta_0, k\right)$. Misst man nun die Zeit von dem Zeitpunkt an, wo der tiefste Punkt erreicht wird, so hat man

$$t = k\sqrt{\frac{l}{g}}\,F\left(-\frac{1}{2}\vartheta, k\right) \text{ und } -\frac{1}{2}\vartheta = am\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot\frac{t}{k}, k\right).$$

Der Punkt macht ganze Kreisumläufe von gleicher Dauer. Die Zeit des halben Umlaufs wird durch das Integral $T = k\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot K$ bestimmt.

Zweiter Fall: $v_0^2 = 4\,gl\,cos\frac{^2\vartheta_0}{2}$

Da $k^2 = 1$, so nehmen die Formeln folgende Werte an:

$$v^2 = 4\,gl\,cos\frac{^2\vartheta}{2},\ t = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\vartheta}\frac{d\vartheta}{cos\frac{\vartheta}{2}} = \sqrt{\frac{l}{g}}\,log\,nat.\left(tan\frac{\pi-\vartheta}{4}\right),\ \frac{\pi-\vartheta}{4} = arctan\left(e^t\sqrt{\frac{g}{l}}\right).$$

Der höchste Punkt des Kreises, für den $\vartheta = -\pi$, wird nicht erreicht, da hierzu t ins Unendliche wachsen muss. Der materielle Punkt nähert sich ihm asymptotisch; je näher er demselben kommt, um so langsamer bewegt er sich.

Dritter Fall: $v_0^2 < 4\,gl\,cos\frac{^2\vartheta_0}{2}$.

Der Modulus $k = \sqrt{\frac{4\,gl}{v^2 + gl\,sin\frac{^2\vartheta_0}{2}}}$ des elliptischen Integrals wäre in diesem Falle > 1.

Wird daher $k_1^2 = \frac{1}{k^2} = \frac{v_0^2 + 4\,gl\,sin^2\frac{\vartheta_0}{2}}{4\,gl}$ gesetzt und eine neue Variabele φ eingeführt, die mit ϑ durch die Gleichung $sin\,\frac{\vartheta}{2} = k_1\,sin\,\varphi$ verbunden ist, sodass dem ϑ_0 ein Winkel φ_0 entspricht und $sin\,\varphi_0 = \frac{sin\,\frac{\vartheta_0}{2}}{k_1}$, so erhält man $t = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot F(\varphi_0, k_1) - \sqrt{\frac{l}{g}}\,F(\varphi, k_1)$. In dem tiefsten Punkt der Bahn ist $\vartheta = \varphi = o$ und $t_1 = \sqrt{\frac{l}{g}}\,F(\varphi_0, k_1)$. Daher hat man, wenn die Zeit vom tiefsten Punkt an gerechnet wird,

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}}\,F(-\varphi, k_1) \text{ und } -\varphi = arc\,sin\left(\frac{sin\frac{\vartheta}{2}}{k_1}\right) = am\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t, k_1\right).$$

Wegen der Bedingung $v_2^0 < 4\,gl\,cos^2\frac{\vartheta_0}{2}$ würde v in diesem Falle für $\vartheta = -\pi$ keinen reellen Wert mehr haben. Der materielle Punkt kann also den höchsten Kreispunkt nicht erreichen, seine Geschwindigkeit wird schon für einen kleineren Polarwinkel α gleich null. Dieser wird aus der Gleichung $v^2 = v_0^2 + 2\,gl\,cos\,\alpha - 2\,gl\,cos\,\vartheta_0 = o$ gefunden; man erhält $cos\,\alpha = -\frac{v_0^2 - 2\,gl\,cos\,\vartheta_0}{2\,gl} = 1 - 2\,k_1^2$ oder $\pm\,sin\frac{\alpha}{2} = k_1$. Innerhalb der Elongationswinkel α und $-\alpha$ vollführt der Punkt Oscillationen, bei welchen die Zeitdauer zwischen einer höchsten und der tiefsten Lage durch das vollständige elliptische Integral $T = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot K,\ mod.\ k_1$, bestimmt ist.

2. Die Spannung des Fadens.

Es ist zu untersuchen, unter welchen Umständen der materielle Punkt die Pendelbewegung aufgeben und sich wie ein freier wieder in einer Parabel bewegen kann. Dies verlangt die Feststellung, in welchen Fällen die Beschleunigung N (Spannung des Fadens), die den Punkt zwingt in der Peripherie des Kreises zu bleiben, null und negativ werden kann. Diese Beschleunigung setzt sich aus der Centrifugalbeschleunigung $\frac{v^2}{l}$ der Kreisbewegung und der Normalkomponente $g\,cos\,\vartheta$ der Schwere zusammen, sodass sich

(4) . . . . . $N = \frac{v^2}{l} + g \cdot cos\,\vartheta$

ergiebt. Wenn sich der materielle Punkt in dem oberen Halbkreis befindet und $\measuredangle\,\vartheta$ also ein stumpfer ist, so wird $cos\,\vartheta$ negativ, sodass auch N null und negativ werden kann. Nun ist wegen (2)

(5) . . . . . $N = \frac{v_0^2 - 2\,gl\,cos\,\vartheta_0}{l} + 3\,g\,cos\,\vartheta.$

Die Druckbeschleunigung N hängt also von dem Polarwinkel in der Weise ab, dass sie mit abnehmendem Winkel grösser wird und dass zu einem negativen ϑ eine ganz gleiche Druckbeschleunigung gehört, wie zu einem gleich grossen positiven Wert von ϑ. Neben den Konstanten

l und g kommen in (5) noch die Konstanten v_0 und ϑ_0 vor, welche durch Grösse und Richtung des Anstosses, den der materielle Punkt erhalten hat, bestimmt werden. Das Maximum erreicht N mit $\vartheta = 0$, das Minimum mit $\vartheta = \mp \pi$.

Die Bedingung für $N = o$ ist $-\cos \vartheta = \frac{v_0^2 - 2\, gl \cos \vartheta_0}{3\, gl}$. Da $v_0^2 - 2\, gl \cos \vartheta_0 > 0$ wegen (2), wenn der materielle Punkt in den oberen Halbkreis gelangen soll, so muss, wenn $N \leqq 0$, erstens $-\cos \vartheta > 0$ sein. Zweitens gilt $v_0^2 - 2\, gl \cos \vartheta_0 < 3\, gl$; denn ausgeschlossen ist ohne weiteres $v_0^2 - 2\, gl \cos \vartheta_0 > 3\, gl$, und wäre $v_0^2 - 2\, gl \cos \vartheta_0 = 3\, gl$, also $\mp \vartheta = \pi$, so könnte N nicht negativ werden und der materielle Punkt die Peripherie nicht verlassen, da N alsdann den Minimalwert null erreicht und alsbald wieder zunimmt. Nur in dem besonderen Fall, dass die Parabel mit ihrem Scheitel den Kreis im höchsten Punkt berührt, dass der bewegliche Punkt nur einen Moment in die Peripherie tritt, kann derselbe aus der Kreisbahn im höchsten Punkt heraustreten. Aus demselben Grund kann der Punkt die Peripherie des Kreises nicht mehr verlassen, nachdem er den höchsten Kreispunkt bereits passiert hat und in dem rechten Halbkreis der positiven Winkel sich bewegt, indem die Spannung des Fadens in diesem wieder zunimmt.

Als Bedingungen dafür, dass der pendelnde Punkt die Peripherie des Kreises verlässt und sich darauf in einer Parabel bewegt, gelten daher

(6) . . . . . $0 < v_0^2 - 2\, gl \cos \vartheta_0 < 3\, gl$,

durch welche der Polarwinkel ϑ_1 des materiellen Punktes im Momente des Abweichens aus der Kreisbahn auf den Quadranten

(7) . . . . . $\frac{\pi}{2} < -\vartheta_1 < \pi$

beschränkt ist.

3. Bewegung in der Parabel.

Der materielle Punkt bewegt sich in einer Parabel weiter, wenn ihm ein negativer Polarwinkel ϑ_1 zukommt, sodass

(8) . . . . . $-\cos \vartheta_1 = \frac{v_0^2 - 2\, gl \cos \vartheta_0}{3\, gl}$.

Ist die Bewegung linksläufig, sodass die Polarwinkel zunehmen, so ist ϑ_1 positiv.

Die ϑ_1 entsprechende Geschwindigkeit ist

(9) . . . . . $v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2\, gl \cos \vartheta_0 + 2\, gl \cos \vartheta_1} = \sqrt{-\, gl \cos \vartheta_1}$.

Man kann nun rechtwinklige Koordinaten einführen, indem die Vertikale als z-Axe mit der positiven Richtung der Schwere und die Horizontale durch den Mittelpunkt des Kreises mit der positiven Richtung nach rechts, d. i. durch den Halbkreis der positiven Winkel, als x-Axe genommen werden.

Die Bewegungsgleichungen des schweren Punktes in der Parabel sind $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$, $\frac{d^2z}{dt^2} = g$, deren erste Integrale daher

(10) . . . . . $\frac{dx}{dt} = -\, v_1 \cos \vartheta_1$ und $\frac{dz}{dt} = v_1 \sin \vartheta_1 + gt$,

wobei die Zeit von der Bewegung in der Parabel an gerechnet werden soll und sowohl $\cos \vartheta_1$ als $\sin \vartheta_1$ negative Grössen darstellen.

Die zweiten Integrale, die Gleichungen der Bahn, sind

$$(11) \quad \begin{cases} x - l \sin \vartheta_1 = - v_1 \cos \vartheta_1 \cdot t \\ z - l \cos \vartheta_1 = v_1 \sin \vartheta_1 \cdot t + \frac{1}{2} g t^2. \end{cases}$$

Der bewegte Punkt muss einmal wieder in die Peripherie des Kreises gelangen, sodass alsdann seine Koordinaten x_2, z_2 der Kreisgleichung $x_2^2 + z_2^2 = l^2$ genügen. Dies geschehe nach der Zeit t_2, welche also durch die Gleichung

$$\left(l \sin \vartheta_1 - v_1 \cos \vartheta_1 \cdot t_2\right)^2 + \left(l \cos \vartheta_1 + v_1 \sin \vartheta_1 \cdot t_2 + \frac{1}{2} g t_2^2\right)^2 = l^2$$

bestimmt wird. Es ergiebt sich $t_2^2 \left(\frac{1}{4} g^2 t_2^2 + g v_1 \sin \vartheta_1 \cdot t_2 + g l \cos \vartheta_1 + v_1^2\right) = 0$ und, da $v_1^2 + g l \cos \vartheta_1 = 0$,

$$(12) \quad t_2 = - \frac{4 v_1 \sin \vartheta_1}{g} = - \frac{4 \left(\frac{dz}{dt}\right)_1}{g},$$

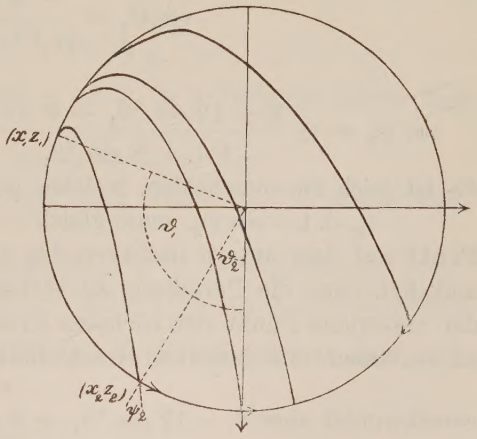
als die Zeit, nach welcher der Punkt aufs neue in die Peripherie gelangt. Seine Koordinaten sind dann

$$(13) \quad \begin{aligned} x_2 &= l \sin \vartheta_1 (1 - 4 \cos^2 \vartheta_1) = - l \sin 3 \vartheta_1 \\ z_2 &= l \cos \vartheta_1 (1 - 4 \sin^2 \vartheta_1) = l \cos 3 \vartheta_1. \end{aligned}$$

Setzt man $x_2 = l \sin \vartheta_2$, $z_2 = l \cos \vartheta_2$, so hat man

$$(14) \quad \vartheta_2 = - 3 \vartheta_1 - 2 \pi.$$

Da ϑ_1 ein negativer stumpfer Winkel ist, so beginnt die Pendelbewegung, wenn $\frac{\pi}{2} < - \vartheta_1 < \frac{2}{3} \pi$ oder $0 < - \cos \vartheta_1 < \frac{1}{2}$, mit einem negativen spitzen Winkel ϑ_2.



Wenn aber $\frac{2}{3} \pi < - \vartheta_1 < \pi$, so ist $- 3 \vartheta_1 > 2 \pi$, der Punkt trifft den Kreis in der rechten Hälfte und ϑ_2 ist ein positiver Winkel. Weil nun $\pi - \vartheta_2 = 3 (\pi + \vartheta_1)$, so ist der Bogen $l (\pi - \vartheta_2)$ zwischen dem Scheitel des Kreises und dem Endpunkt der Parabel dreimal so gross als der Bogen $l (\pi + \vartheta_1)$ zwischen dem Ausgangspunkt der Parabel und dem Scheitel des Kreises. Ist speciell $- \vartheta_1 = \frac{2}{3} \pi$, so ergiebt sich $\vartheta_2 = 0$, der bewegliche Punkt trifft den Kreis im tiefsten Punkt, jedoch nicht unter einem rechten Winkel, und setzt seine Bewegung nach rechts im Kreise fort, wie aus dem Folgenden klar wird.

Die Geschwindigkeit des Punktes zerfällt beim Eintreffen im Kreis in eine Komponente, die durch die Spannung des Fadens vernichtet wird, und in eine zweite tangentielle Komponente v_2, die Anfangsgeschwindigkeit der neuen Kreisbewegung. Bezeichnet man den Winkel, den die Tangente der Parabel mit dem Radius bildet. mit ψ_2 und beachtet man die Gleichung der Tangente

$$\frac{x - x_2}{\left(\frac{dx}{dt}\right)_2} = \frac{z - z_2}{\left(\frac{dz}{dt}\right)_2}$$

und die Gl. des Radius (der Normale)

$$\frac{x}{x_2} = \frac{z}{z_2},$$

so erhält man

$$\cos \psi_2 = \frac{x_2 \left(\frac{dx}{dt}\right)_2 + z_2 \left(\frac{dz}{dt}\right)_2}{l \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)_2^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)_2^2}}$$

und als verlorene Komponente folglich

$$v \cos \psi_2 = \frac{x_2 \left(\frac{dx}{dt}\right)_2 + z_2 \left(\frac{dz}{dt}\right)_2}{l}.$$

Nun ist aber $\left(\frac{dx}{dt}\right)_2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)_1$, $\left(\frac{dz}{dt}\right)_2 = \left(\frac{dz}{dt}\right)_1 + g t_2$ und $x_2 = x_1 + \left(\frac{dx}{dt}\right)_1 \cdot t_2$; $z_2 = z_1 + \left(\frac{dz}{dt}\right)_1 \cdot t_2 + \frac{1}{2} g t_2^2$, folglich die verlorene Komponente

(15) . . . . . $v \cos \psi_2 = g \frac{t_2^2}{2 l} \left[3 \left(\frac{dz}{dt}\right)_1 + g \cdot t_2\right] = - 8 \frac{\left(\frac{dz}{dt}\right)_1^3}{gl}.$

Die Geschwindigkeit v, mit welcher der Punkt im Kreise ankommt, ist

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)_2^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)_2^2} = v_1 \sqrt{1 + 8 \sin^2 \vartheta_1},$$

sodass

$$\cos \psi_2 = \frac{- 8 v_1^2 \sin^3 \vartheta_1}{lg \sqrt{1 + 8 \sin^2 \vartheta_1}} = \frac{8 \sin^3 \vartheta_1 \cos \vartheta_1}{\sqrt{1 + 8 \sin^2 \vartheta_1}} \text{ und}$$

$$\sin \psi_2 = \pm \frac{3 - 12 \cos^2 \vartheta_1 + 8 \cos^4 \vartheta_1}{\sqrt{1 + 8 \sin^2 \vartheta_1}} = \frac{\pm 8 \left(\frac{3 + \sqrt{3}}{4} - \cos^2 \vartheta_1\right)\left(\frac{3 - \sqrt{3}}{4} - \cos^2 \vartheta_1\right)}{\sqrt{1 + 8 \sin^2 \vartheta_1}}$$

Es ist noch zu entscheiden, welches der beiden Vorzeichen für $\sin \psi_2$ gilt.

v_2, d. i. $v \sin \psi_2$, muss gleich $- v$ und $\sin \psi_2 = - 1$ gesetzt werden, wenn der materielle Punkt auf dem untern Halbkreis bis an die x-Axe gelangt ist, wo $\cos \vartheta_1 = 0$, und seine Richtung umkehrt, ohne die Peripherie zu verlassen. Dagegen hat man $v_2 = + v$ und $\sin \psi_2 = 1$, wenn der materielle Punkt den höchsten Kreispunkt erreicht, wo $\cos \vartheta_1 = - 1$, und ohne die Peripherie zu verlassen, mit derselben Geschwindigkeit weiter geht. In dem Zahlenraum $0 > \cos \vartheta_1 > - 1$ verschwindet aber $3 - 12 \cos^2 \vartheta_1 + 8 \cos^4 \vartheta_1$ nur für $\cos \vartheta_1 = - \frac{\sqrt{3 - \sqrt{3}}}{2}$, woraus hervorgeht, dass v_2, sowie $\sin \psi$ für $\cos \vartheta_1 < - \frac{\sqrt{3 - \sqrt{3}}}{2}$, d. i. $\cos^2 \vartheta_1 > \frac{3 - \sqrt{3}}{4}$, positiv und für $\cos \vartheta_1 > - \frac{\sqrt{3 - \sqrt{3}}}{2}$ negativ ist, dass also das untere Vorzeichen für $\sin \psi_2$ gilt.

Daher ergiebt sich für die Geschwindigkeit v_2, mit welcher der materielle Punkt die Bewegung im Kreise wiederbeginnt,

(16) . . . . . $v_2 = v_1 (- 3 + 12 \cos^2 \vartheta_1 - 8 \cos^4 \vartheta_1).$

Soll $v_2 = 0$ sein, so gilt die Bedingung $\cos \vartheta_1 = - \frac{\sqrt{3 - \sqrt{3}}}{2}$, also $- \vartheta_1 = 124^0\, 15'\, 52''\, 71$ und

daher $\vartheta_2 = 12^0\,47'\,38'',13$. Die neue Pendelbewegung beginnt somit in einer der früheren Richtung entgegengesetzten, wenn $-\vartheta_1 < 124^0\,15'\,52'',71$, in gleicher Richtung jedoch, wenn $-\vartheta_1 \geqq 124^0\,15'\,52'',71$.

Wäre die Verbindungslinie mit dem festen Punkt eine starre, der bewegliche Punkt also in dem Kreise geblieben, so würde seine Geschwindigkeit in dem Kreispunkt, welcher von der Parabel geschnitten wird, den Wert

$$\sqrt{v_0^2 + 2\,gl\,(\cos\vartheta_2 - \cos\vartheta_0)} = \sqrt{-\,gl\,(3\cos\vartheta_1 - 2\cos 3\vartheta_1)} = v_1\sqrt{1 + 8\sin^2\vartheta_1}$$

annehmen; er ist dem Werte der Endgeschwindigkeit in der Parabelbewegung gleich. Da nun eine Komponente der letzteren verloren geht, so ist v_2 kleiner als die demselben Kreispunkt entsprechende Geschwindigkeit bei ununterbrochener Kreisbewegung. Dieser Umstand lässt nicht ohne weiteres die Annahme zu, dass der Kreis ein zweites Mal verlassen werden kann.

4. Zweite Abweichung aus der Kreisbahn.

Eine zweite Abweichung kann nur stattfinden, wenn der Polarwinkel ϑ_3 im Momente des Abweichens ein stumpfer ist, also wenn $o < -\cos\vartheta_3 < 1$. Nun hängt in gleicher Weise $-\cos\vartheta_3$ von v_2 und $\cos\vartheta_2$ ab, wie $-\cos\vartheta_1$ von v_0 und $\cos\vartheta_0$, es ist daher

$$(17) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad -\cos\vartheta_3 = \frac{v_2^2 - 2\,gl\cos\vartheta_2}{3\,gl}$$

und wegen (16), (15) und (9)

$$-\cos\vartheta_3 = \frac{-\cos\vartheta_1\,(-8\cos^4\vartheta_1 + 12\cos^2\vartheta_1 - 3)^2 - 2\cos\vartheta_1\,(4\cos^2\vartheta_1 - 3)}{3}, \text{ d. i.}$$

$$(18) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad -\cos\vartheta_3 = -\cos\vartheta_1\left[1 - \frac{64}{3}\cos^2\vartheta_1\sin^6\vartheta_1\right].$$

Der erste Faktor $-\cos\vartheta_1$ ist positiv, die Bedingung $-\cos\vartheta_3 > 0$ verlangt daher, dass auch der zweite positiv ist, also die Ungleichung gilt

$$64\cos^8\vartheta_1 - 192\cos^6\vartheta_1 + 192\cos^4\vartheta_1 - 64\cos^2\vartheta_1 + 3 > 0.$$

Zerlegt man die Form linker Hand, die bezüglich $\cos^2\vartheta_1$ vom 4ten Grade ist, in reelle Faktoren, so ergiebt sich die Bedingung

$$64\,[\cos^4\vartheta_1 - 2{,}3808808\cos^2\vartheta_1 + 1{,}494588]\,[\cos^2\vartheta_1 - (0{,}7506379)^2]\,[\cos^2\vartheta_1 - (0{,}2359279)^2] > 0.$$

Da der erste Faktor in der Klammer positiv und auch $(\cos\vartheta_1 - 0{,}7506379)\,(\cos\vartheta_1 - 0{,}2359279)$ wegen $\frac{\pi}{2} < -\vartheta_1 < \pi$ positiv ist, so kann der materielle Punkt die Kreisbahn nur dann aufgeben, wenn

$$(\cos\vartheta_1 + 0{,}7506379)\,(\cos\vartheta_1 + 0{,}2359279) > 0.$$

Dazu gehört entweder $-\cos\vartheta_1 > 0{,}7506379$ oder $-\cos\vartheta_1 < 0{,}2359279$. Eine zweite Abweichung findet also statt, wenn entweder

$$(19) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 138^0\,38'\,44'',41 < -\vartheta_1 < \pi$$

oder wenn

$$(20) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{\pi}{2} < \vartheta_1 < 103^0\,38'\,46'',77.$$

In dem ersten Fall trifft der Punkt in dem rechten Halbkreis ein und bewegt sich mit positiver Geschwindigkeit weiter, in dem zweiten Fall bleibt der Punkt in der linken Kreishälfte und bewegt sich, nachdem er die Peripherie erreicht hat, auf derselben mit negativer Geschwindigkeit, d. h. mit zunehmendem Polarwinkel, nach dem positiven Halbkreis zu.

Gehört der Polarwinkel $-\vartheta_1$ dem dazwischenliegenden Intervall

(21) . . . . . $103^0\,38'\,46'',77 \leqq -\vartheta_1 \leqq 138^0\,38'\,44'',41$

an, so verlässt der materielle Punkt, nachdem er die Parabel durchlaufen hat, die Peripherie nicht wieder und vollführt nur noch die Schwingungen eines Pendels in dem untern Halbkreis.

Zweitens muss $-\cos\vartheta_3$, d. i. $\frac{v_2^2 - 2\,gl\cos\vartheta_2}{3\,gl} < 1$ sein. Denn wäre $v_2^2 - 2\,gl\cos\vartheta_2 \geqq 3\,gl$, so würde sich der materielle Punkt über den höchsten Kreispunkt hinausbewegen, wie die Bedingung für den ersten Fall der Pendelbewegung (siehe ersten Abschnitt) zulässt, und es könnte somit keine Abweichung mehr eintreten. Die verlangte Bedingung wird aber erfüllt, nachdem der Punkt die Peripherie verlassen und wieder erreicht hat, da der Übergang der Parabelbewegung in die Kreisbewegung mit einem Verlust an lebendiger Kraft verbunden und somit die Geschwindigkeit der zweiten Kreisbewegung überall kleiner ist als die der ersten. Erreichte daher der materielle Punkt bei der ersten Kreisbewegung den obersten Kreispunkt nicht, so erreicht er ihn bei der zweiten noch weniger und verlässt vielmehr von einer tiefer gelegenen Stelle die Peripherie.

Auch analytisch kommt man zu dem Resultat, dass $-\vartheta_3 < -\vartheta_1$, da $-\cos\vartheta_3 = -\cos\vartheta_1 - \frac{1}{3}[4\cos\vartheta_1 \sin^2\vartheta_1]^3$, also $-\cos\vartheta_3 < -\cos\vartheta_1$ ist.

5. Weitere Abweichungen.

1) Unter der Voraussetzung, dass $\frac{\pi}{2} < -\vartheta_1 < 103^0\,38'\,46'',77$ oder $0 < -\cos\vartheta_1 < 0{,}2359279$ unter welcher eine erste und zweite Abweichung aus der Kreisbahn erfolgt, erfolgt auch eine dritte, vierte u. s. w., da $0 < -\cos\vartheta_3 < -\cos\vartheta_1 < 0{,}2359279$ und somit $0 < -\cos\vartheta_5 < -\cos\vartheta_3$ u. s. w.

Die Abweichungen finden abwechselnd in dem negativen und in dem positiven Halbkreis statt. Ist ϑ der Polarwinkel für irgend eine Abweichung, so stellt $-\cos\vartheta\left[1 - \frac{64}{3}\cos^2\vartheta\,(1 - \cos^2\vartheta)^3\right]$ den Kosinus des Polarwinkels für die folgende Abweichung aus der Peripherie dar. Die Klammergrösse, deren Derivierte nach $\cos^2\vartheta$ den Wert $\frac{64}{3}(1 - \cos^2\vartheta)^2(4\cos^2\vartheta - 1)$ hat und negativ ist für das vorausgesetzte Wertgebiet von $-\cos\vartheta_1$, nimmt zu mit abnehmendem $\cos^2\vartheta$. Je kleiner also $\cos^2\vartheta$ und $\pm\vartheta$, je tiefer die Punkte der Abweichung liegen, um so mehr nähert sich der Faktor der Einheit und würde ihr gleich werden, wenn $-\cos\vartheta = 0$ wäre. Alsdann würden nur noch Pendelschwingungen in dem untern Halbkreis erfolgen.

Diese Näherung wird jedoch immer langsamer, sodass die Axenpunkte nach einer endlichen Zahl von Abweichungen nicht erreicht werden können. Denn nimmt man n solcher Abweichungen an, so wäre schliesslich, wenn ϑ_{2n-1} bis $\frac{\pi}{2}$ abgenommen hätte,

$$0 = -\cos\vartheta_{2n-1} = -\cos\vartheta_{2n-3}\cdot\left[1 - \frac{64}{3}\cos^2\vartheta_{2n-3}\sin^6\vartheta_{2n-3}\right]$$

$$= -\cos\vartheta_1\left[1 - \frac{64}{3}\cos^2\vartheta_1\sin^6\vartheta_1\right]\left[1 - \frac{64}{3}\cos^2\vartheta_3\sin^6\vartheta_3\right]\ldots\left[1 - \frac{64}{3}\cos^2\vartheta_{2n-3}\sin^6\vartheta_{2n-3}\right].$$

Die Faktoren in den Klammern sind echte Brüche, jeder folgende ist grösser als der vor-

hergehende. Da der erste Faktor $-\cos\vartheta_1$ jedoch grösser als null ist, so kann das Produkt für endliche n nicht gleich null werden.

2) Wenn $138^0\,38'\,44'', 41 < -\vartheta < \pi$ und somit $0{,}7506379 < -\cos\vartheta_1 < 1$, so kann bereits nach der zweiten Abweichung $-\cos\vartheta_3 < 0{,}7506379$ sein, da auf jeden Fall $-\cos\vartheta_3 < -\cos\vartheta_1$ ist. Daraus geht hervor, dass eine dritte Abweichung nicht möglich ist, wenn die Abnahme nicht so viel ausmacht, dass $-\cos\vartheta_3 < 0{,}2359279$. Dann müsste ausser $-\cos\vartheta > 0{,}7506379$ noch $-\cos\vartheta_1\left[1 - \frac{64}{3}\cos^2\vartheta\sin^6\vartheta\right] < 0{,}2359279$ oder

$$\cos^9\vartheta - 3\cos^7\vartheta + 3\cos^5\vartheta - \cos^3\vartheta + 0{,}046875\cos\vartheta + 0{,}01105812 < 0$$

sein. Die Form hat nur drei reelle Faktoren, was mit dem Sturm'schen Lehrsatz nachgewiesen werden kann. Dieselben sind

$$(\cos\vartheta + 0{,}79077688)\,(\cos\vartheta - 0{,}7070550)\,(\cos\vartheta - 0{,}3385182).$$

Nur der erste kommt hier in Betracht und lässt erkennen, dass die Ungleichungen

$$0{,}7506379 < -\cos\vartheta < 0{,}79077688 \text{ oder}$$

(22) . . . . . $138^0\,38'\,44'', 41 < -\vartheta < 142^0\,15'\,29'', 44$

das kleine Gebiet darstellen, aus welchem eine Abweichung den materiellen Punkt sofort in das Gebiet mit unendlich vielen Abweichungen überführt, in welchem die Ausgangspunkte der Abweichungen asymptotisch den Kreispunkten in der horizontalen Axe genähert werden. Verlässt jedoch der materielle Punkt den Kreis mit einem Polarwinkel $-\vartheta_1$, sodass

$$-\cos\vartheta_1 \geqq 0{,}79077688 \text{ oder}$$

(23) . . . . . $142^0\,15'\,29'', 44 \leqq -\vartheta_1 < \pi,$

so gelangt er mit mehr oder weniger Abweichungen in den durch (21) begrenzten Teil der Peripherie, aus dem er nur noch einmal eine Parabel durchläuft und in den untern Halbkreis gelangt, wo er bleibt. Die Anzahl der Abweichungen, die der letzten vorangehn, ist um so kleiner, je kleiner $-\vartheta_1$, da der Quotient $\frac{-\cos\vartheta_3}{-\cos\vartheta_1} = 1 - \frac{64}{3}\cos^2\vartheta_1\,(1-\cos^2\vartheta_1)^3$ einen um so kleineren echten Bruch darstellt, je kleiner $-\vartheta_1$ ist.

6. Vergleichung der Bewegungsdauer in beiden Bahnen.

Es ist auffallend, das die Geschwindigkeiten in beiden Bahnen, in der Parabel und dem Kreisstück, übereinstimmen. Dieselbe hat nämlich bei der Kreisbewegung den Wert

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2\,gl\cos\vartheta_0 + 2\,gl\cos\vartheta} = \sqrt{3\,v_1^2 + 2\,gz},$$

bei der Parabelbewegung nach (10) und (11) den Wert

$$v = \sqrt{v_1^2\cos^2\vartheta_1 + (v_1\sin\vartheta_1 + gt)^2}$$
$$= \sqrt{v_1^2\cos^2\vartheta_1 + v_1^2\sin^2\vartheta_1 + 2\,v_1^2 + 2\,gz} = \sqrt{3\,v_1^2 + 2\,gz}.$$

In einander entsprechenden Punkten beider Kurven, wenn man darunter Punkte in gleicher Entfernung von der x-Axe versteht, sind die Geschwindigkeiten einander gleich. Bis zum Scheitel nehmen sie in beiden Bahnen ab, darauf nehmen sie wieder zu und haben im Schnittpunkt den Wert

$$\sqrt{3\,v_1^2 + 2\,gl\cos\vartheta_2} = v_1\sqrt{1 + 8\sin^2\vartheta_1}.$$

Man könnte deshalb vermuten, dass der materielle Punkt die Parabel innerhalb derselben Zeit durchläuft als das Kreisstück, das zwischen Anfangs- und Endpunkt der Parabel liegt. Es kann jedoch nachgewiesen werden, dass die Bewegung im Kreise eine längere Zeit t_c beansprucht, womit zugleich gezeigt wäre, dass der Weg in der Parabel $\int_0^t v\,dt$ der kürzere ist.

Zum Beweis müssen die beiden Fälle der Kreisbewegung unterschieden werden, bei denen

$$1)\ 3\,v_1^{\,2} > 2\,gl \text{ oder } -\cos\vartheta_1 > \frac{2}{3},$$

$$2)\ 3\,v_1^{\,2} < 2\,gl \text{ oder } -\cos\vartheta_1 < \frac{2}{3}.$$

Im ersten Fall finden ganze Kreisläufe statt, im zweiten Oscillationen innerhalb der beiden Elongationswinkel $\pm\alpha$, wo $\cos\alpha = \frac{3}{2}\cos\vartheta_1$. In dem übriggebliebenen Fall $3\,v_1^{\,2} = 2\,gl$ erreicht der materielle Punkt den Scheitel des Kreises nicht in endlicher Zeit, wie im ersten Abschnitt auseinander gesetzt ist, sodass die Behauptung hierfür nicht mehr bewiesen zu werden braucht.

Die Dauer der Parabelbewegung ist nach (12) und (9)

$$(24)\quad \ldots\ldots\ldots\quad t_2 = -4\sqrt{\frac{l}{g}}\sin\vartheta_1\sqrt{-\cos\vartheta_1},$$

sie ist von ϑ_1 abhängig. Die Änderungsgeschwindigkeit wird durch den Differentialquotienten

$$\frac{dt_2}{d\vartheta_1} = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\frac{(3\cos^2\vartheta_1 - 1)}{\sqrt{-\cos\vartheta_1}}$$

gemessen. Derselbe ist positiv, so lange $\cos^2\vartheta_1 > \frac{1}{3}$ ist. Lässt man die Abweichung in Gedanken vom Scheitel aus in immer tiefer liegenden Peripheriepunkten beginnen, so wird die Dauer t_2 der Parabelbewegung immer grösser, sie nimmt zu von 0, wenn $\cos\vartheta_1 = -1$, bis $\frac{4}{9}\sqrt{\frac{l}{g}}\sqrt{30}$, wenn $\cos\vartheta_1 = -\frac{2}{3}$. Im zweiten Fall ist $t_2 = 0$, wenn $\cos\vartheta_1 = 0$ ist, nämlich in der horizontalen Axe, und nimmt mit abnehmendem $\cos\vartheta_1$ zu, bis $\cos\vartheta_1$ den Wert $\frac{\sqrt{3}}{3}$ angenommen hat, aldann wieder ab, wenn $\cos\vartheta_1$ noch mehr abnimmt, bis $\cos\vartheta_1 = -\frac{2}{3}$. Ist $\cos\vartheta_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, so erreicht t_2 sein Maximum $\frac{4}{3}\sqrt{\frac{l}{g}}\sqrt{12} = 2{,}48\ldots\sqrt{\frac{l}{g}}$, welches im zweiten Fall der Kreisbewegung auftritt. Die Vergleichung der beiden Bahnen lässt sich nun folgendermassen ausführen.

Erster Fall: $1 > -\cos\vartheta_1 > \frac{2}{3}$.

Es ist

$$t_c = -l\int_{\vartheta_1}^{-\pi}\frac{d\vartheta}{v} - l\int_{\pi}^{\vartheta_2}\frac{d\vartheta}{v} \text{ und } v = \sqrt{lg}\sqrt{-3\cos\vartheta_1 + 2\cos\vartheta}, \text{ daher}$$

$$(25)\quad \ldots\quad t_c = \sqrt{\frac{l}{g}}\int_{\vartheta_1}^{\pi}\frac{d\vartheta}{\sqrt{-3\cos\vartheta_1 + 2\cos\vartheta}} + \sqrt{\frac{l}{g}}\int_{\vartheta_2}^{\pi}\frac{d\vartheta}{\sqrt{-3\cos\vartheta_1 + 2\cos\vartheta}}$$

Wenn der materielle Punkt einen solchen Anstoss erhalten hat, dass die Spannung erst im höchsten Punkt verschwindet, so sind t_c und t_2 einander gleich, beide gleich null. Nun kann

bewiesen werden, dass $\frac{dt_c}{d\vartheta_1}$ und $\frac{dt_2}{d\vartheta_1}$ beide positiv und im höchsten Kreispunkt einander gleich sind, dass im übrigen aber $\frac{dt_c}{d\vartheta_1} > \frac{dt_2}{d\vartheta_1}$. Damit wäre dann gezeigt, dass $t_c > t_2$ ist.

Man erhält

$$\frac{dt_c}{d\vartheta_1} = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{-\cos\vartheta_1}} - \frac{3}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} \sin\vartheta_1 \int_{-\vartheta_1}^{\pi} \frac{d\vartheta}{\sqrt{(-3\cos\vartheta_1 + 2\cos\vartheta)^3}}$$

$$+ 3\sqrt{\frac{l}{g}} \frac{1}{\sqrt{-\cos\vartheta_1}\sqrt{9 - 8\cos^2\vartheta_1}} - \frac{3}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} \sin\vartheta_1 \int_{\vartheta_2}^{\pi} \frac{d\vartheta}{\sqrt{(-3\cos\vartheta_1 + 2\cos\vartheta)^3}}.$$

Da $131^0\,48'\,37'',14 < -\vartheta_1 < 180^0$ und $35^0\,25'\,51'',42 < \vartheta_2 = -3\vartheta_1 - 2\pi < \pi$, so sind alle vier Glieder positiv. Kann nun bewiesen werden, dass

$$\frac{d^2t_c}{d\vartheta_1^2} > \frac{d^2t_2}{d\vartheta_1^2}, \text{ so ist auch } \frac{dt_c}{d\vartheta_1} > \frac{dt_2}{d\vartheta_1} \text{ und } t_c > t_2.$$

Es ergiebt sich

$$\frac{d^2t_c}{d\vartheta_1^2} = -2\sqrt{\frac{l}{g}} \frac{\sin\vartheta_1}{\sqrt{(-\cos\vartheta_1)^3}} - 18\sqrt{\frac{l}{g}} \frac{\sin\vartheta_1 (1 - 2\cos^2\vartheta_1)}{\sqrt{(-\cos\vartheta_1)^3}\sqrt{(9 - 8\cos^2\vartheta_1)^3}}$$

$$- \frac{3}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} \cos\vartheta_1 \int_{-\vartheta_1}^{\pi} \frac{d\vartheta}{\sqrt{(-3\cos\vartheta_1 + 2\cos\vartheta)^3}} + \frac{27}{4}\sqrt{\frac{l}{g}} \sin^2\vartheta_1 \int_{-\vartheta_1}^{\pi} \frac{d\vartheta}{\sqrt{(-3\cos\vartheta_1 + 2\cos\vartheta)^5}}$$

$$- \frac{3}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} \cos\vartheta_1 \int_{\vartheta_2}^{\pi} \frac{d\vartheta}{\sqrt{(-3\cos\vartheta_1 + 2\cos\vartheta)^3}} + \frac{27}{4}\sqrt{\frac{l}{g}} \sin^2\vartheta_1 \int_{\vartheta_2}^{\pi} \frac{d\vartheta}{\sqrt{(-3\cos\vartheta_1 + 2\cos\vartheta)^5}}.$$

Auch hier sind die Glieder positiv, das zweite jedoch ausgeschlossen, wenn $\cos^2\vartheta_1 > \frac{1}{2}$. Es könnte demnach $\frac{d^2t_c}{d\vartheta_1^2}$ auch negativ werden, ebenso wie $\frac{d^2t_2}{d\vartheta_1^2} = \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{\sin\vartheta_1 (g\cos^2\vartheta_1 + 1)}{\sqrt{(-\cos\vartheta_1)^3}}$ eine negative Grösse darstellt. Es wäre also die Entscheidung zu treffen, ob $\frac{d^2t_c}{d\vartheta_1^2} > \frac{d^2t_2}{d\vartheta_1^2}$, selbst wenn $\frac{d^2t_c}{d\vartheta_1^2}$ negativ ist.

Lässt man ϑ von $-\vartheta_1$ bis π zunehmen, so ist in diesem ganzen Zahlenraume

$$-3\cos\vartheta_1 + 2\cos\vartheta < -3\cos\vartheta_1 + 2\cos\vartheta_1,$$

also das dritte Glied von $\frac{d^2t_c}{d\vartheta_1}$ grösser als

$$-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} \frac{\cos\vartheta_1}{\sqrt{(-\cos\vartheta_1)^3}} \int_{-\vartheta_1}^{\pi} d\vartheta,$$

und da $\pi + \vartheta_1 > \sin(\pi + \vartheta_1)$, auch grösser als

$$\frac{3}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} \frac{\sin\vartheta_1 \cos\vartheta_1}{\sqrt{(-\cos\vartheta_1)^3}}.$$

Ebenso ist in dem Zahlenraum von ϑ_2 bis π

$$-3\cos\vartheta_1 + 2\cos\vartheta < -3\cos\vartheta_1 + 2\cos\vartheta_2, \text{ d. i. } < -g\cos\vartheta_1 + 8\cos^3\vartheta_1,$$

also

$$\frac{1}{\sqrt{-3\cos\vartheta_1 + 2\cos\vartheta}} > \frac{1}{\sqrt{-\cos\vartheta_1}\sqrt{9 - 8\cos^2\vartheta_1}}$$

und das fünfte Glied von $\frac{d^2t_c}{d\vartheta_1^{\,2}}$ grösser als

$$-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\frac{\cos\vartheta_1}{\sqrt{(-\cos\vartheta_1)^3}\sqrt{(9-8\cos^2\vartheta^1)^3}}\int_{\vartheta_2}^{\pi}d\vartheta,$$

und da $\pi-\vartheta_2$, d. i. $3(\pi+\vartheta_1)>3\sin(\pi+\vartheta_1)$, auch grösser als

$$\frac{9}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\frac{\sin\vartheta_1\cos\vartheta_1}{\sqrt{(-\cos\vartheta^1)^3}\sqrt{(9-8\cos^2\vartheta_1)^3}},\ \text{mithin}$$

$$\frac{d^2t_c}{d\vartheta_1^{\,2}}>-\sqrt{\frac{l}{g}}\frac{\sin\vartheta_1}{\sqrt{(-\cos\vartheta_1)^3}}\left[2-18\frac{2\cos^2\vartheta_1-1}{(9-8\cos^2\vartheta_1)^{3/2}}-\frac{3}{2}\cos\vartheta_1-\frac{9}{2}\frac{\cos\vartheta_1}{(9-8\cos^2\vartheta_1)^{3/2}}\right],$$

und es fragt sich, ob $\frac{d^2t_c}{d\vartheta_1^{\,2}}>\frac{d^2t_2}{d\vartheta_1^{\,2}}$, ob also

$$2-\frac{3}{2}\cos\vartheta_1-\frac{9}{2}\frac{8\cos^2\vartheta_1+\cos\vartheta_1-4}{(9-8\cos^2\vartheta_1)^{3/2}}>-9\cos^2\vartheta_1-1 \text{ oder}$$

$$6\cos^2\vartheta_1-\cos\vartheta_1+2>3\frac{8\cos^2\vartheta_1+\cos\vartheta_1-4}{(9-8\cos^2\vartheta_1)^{3/2}} \text{ ist.}$$

Nun ist $9-8\cos^2\vartheta_1=9-12\cos^2\vartheta_1+4\cos^2\vartheta_1$

$$>9+12\cos\vartheta_1+4\cos^2\vartheta_1, \text{ folglich}$$

$$\frac{1}{\sqrt{9-8\cos^2\vartheta_1}}<\frac{1}{3+2\cos\vartheta_1}.$$

Wenn daher bewiesen wäre, dass

$$6\cos^2\vartheta_1-\cos\vartheta_1+2>3\frac{8\cos^2\vartheta_1+\cos\vartheta_1-4}{(3+2\cos\vartheta_1)^3},$$

so wäre auch die Behauptung bewiesen. Dazu müsste

$$(6\cos^2\vartheta_1-\cos\vartheta_1+2)(3+3\cos\vartheta_1)^3>24\cos^2\vartheta_1+3\cos\vartheta_1-12 \text{ oder}$$

$$(1+\cos\vartheta_1)(24\cos^4\vartheta_1+80\cos^3\vartheta_1+72\cos^2\vartheta_1+6\cos\vartheta_1+33)>0 \text{ sein.}$$

Da aber $72\cos^3\vartheta_1+72\cos^2\vartheta_1>0$, sowie auch

$$24\cos^4\vartheta_1+8\cos^3\vartheta_1+6\cos\vartheta_1+33>0,$$

so ist in der That $\frac{d^2t_c}{d_1\vartheta^2}>\frac{d^2t_2}{d\vartheta_1^{\,2}}$ und daher auch $\frac{dt_c}{d\vartheta_1}>\frac{dt_2}{d\vartheta_1}$ und

(26) . . . . . $t_c>t_2$

Zweiter Fall: $0<-\cos\vartheta_1<\frac{2}{3}$, $\cos\alpha=\frac{3}{2}\cos\vartheta_1$.

$$\text{Es ist } t_c=-l\int_{\vartheta_1}^{\alpha}\frac{d\vartheta}{v}+l\int_{\alpha}^{\vartheta_2}\frac{d\vartheta}{v}, \text{ also}$$

(27) . . . . . $t_c=\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_{\alpha}^{\vartheta_1}\frac{d\vartheta}{\sqrt{\cos\vartheta-\cos\alpha}}+\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_{\alpha}^{\vartheta_1}\frac{d\vartheta}{\sqrt{\cos\vartheta-\cos\alpha}}.$

Unterscheidet man negative und positive ϑ_2, so hat man für erstere

$$t_c=\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_{\alpha}^{\vartheta_1}\frac{d\vartheta}{\sqrt{\cos\vartheta-\cos\alpha}}+\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_{\alpha}^{0}\frac{d\vartheta}{\sqrt{\cos\vartheta-\cos\alpha}}-\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_{\vartheta_2}^{0}\frac{d\vartheta}{\sqrt{\cos\vartheta-\cos\alpha}},$$

für positiv ϑ_2 ist das dritte Integral gleich $+\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_{0}^{\vartheta_2}\frac{d\vartheta}{\sqrt{\cos\vartheta-\cos\alpha}}$.

Die Funktion unter dem Integralzeichen wird für $\vartheta=\alpha$ unendlich. Die beiden Integrale in (27) verlieren jedoch ihre Bedeutung nicht. Man kann nämlich zeigen, dass das Integral

$\int_{\alpha}^{\alpha+\varepsilon} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\cos\vartheta - \cos\alpha}}$, worin ε eine kleine positive Zahl bedeutet, mit abnehmendem ε immer kleiner wird und endlich verschwindet. Ist n ein positiver echter Bruch, so erhält man nach dem Maximum — Minimumsatz

$$\int_{\alpha}^{\alpha+\varepsilon} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\cos\vartheta - \cos\alpha}} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\cos(\alpha + n\varepsilon) - \cos\alpha}} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\cos\alpha\cos n\varepsilon - \sin\alpha\sin n\varepsilon - \cos\alpha}}$$

Hierin ist $\cos\alpha$ negativ, $\cos\alpha\cos n\varepsilon - \cos\alpha > 0$, ferner $\sin n\varepsilon > n\varepsilon - \frac{n^3\varepsilon^3}{1\cdot 2\cdot 3}$.

Daher ergiebt sich

$$\frac{d\vartheta}{\sqrt{\cos\vartheta - \cos\alpha}} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{-\sin\alpha\cdot\sin n\varepsilon}} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n\varepsilon - \frac{n^3\varepsilon^3}{6}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{-\sin\alpha}},$$

woraus hervorgeht, dass das Integral $< \sqrt{\frac{\varepsilon}{n - \frac{n^3\varepsilon^3}{6}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{-\sin\alpha}}$ und mit verschwindendem ε selbst verschwindet, so lange $\alpha > -\pi$.

Aber auch $\frac{dt_c}{d\vartheta_1}$ erweist sich als unendlich wegen eines Bestandtheiles für $\cos\vartheta = \cos\alpha$, welcher ausgeschlossen werden müsste. Man gelangt dagegen zu endlicher Form, wenn man auf (27) die Substitution

(28) . . . . $\cos\vartheta = \frac{\cos\alpha + k^2\sin^2\varphi}{1 - k^2\sin^2\varphi}$, $k^2 = \frac{1-\cos\alpha}{2} = \frac{2 - 3\cos\vartheta_1}{4} < 1$,

anwendet. Damit ergiebt sich

(29) . . . . . $\sin^2\varphi = \frac{\cos\vartheta - \cos\alpha}{k^2(1+\cos\vartheta)}$.

Lässt man ϑ und φ gleichzeitig zunehmen, ϑ von α bis $-\alpha$, wobei $-\frac{\pi}{2} > \alpha > -\pi$, φ daher von 0 bis π, so wächst $\sin\varphi$ bis 1, wo $\vartheta = 0$, und nimmt wieder ab bis 0, ohne negativ zu werden, $\cos\varphi$ aber erreicht den Wert 0 mit $\vartheta = 0$ und nimmt mit grösserem ϑ ab bis -1.

Setzt man $\vartheta = \vartheta_1$ und $\vartheta = \vartheta_2$, so erhält man

(30) . .
$$\begin{cases} \sin^2\varphi_1 = \frac{\cos\vartheta_1 - \cos\alpha}{k^2(1+\cos\vartheta_1)} = \frac{-2\cos\vartheta_1}{(2-3\cos\vartheta_1)(1+\cos\vartheta_1)}. \\ \sin^2\varphi_2 = \frac{\cos\vartheta_2 - \cos\alpha}{k^2(1+\cos\vartheta_2)} = \frac{-2\cos\vartheta_1}{(2-3\cos\vartheta_1)(1+\cos\vartheta_1)}\cdot\frac{9-8\cos^2\vartheta_1}{(1-2\cos\vartheta_1)^2}. \end{cases}$$

Da $1 - \cos\vartheta = \frac{2k^2\cos^2\varphi}{1-k^2\sin^2\varphi}$ und $1 + \cos\vartheta = \frac{2(1-k^2)}{1-k^2\sin^2\varphi}$, so ist

$\sin\vartheta = -\frac{2k\sqrt{1-k^2}\cdot\cos\varphi}{1-k^2\sin^2\varphi}$, denn $\sin\vartheta$ und $\cos\varphi$ haben entgegengesetzte Zeichen. Ferner hat man $-\sin\vartheta\, d\vartheta = \frac{4k^2(1-k^2)\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^2}$ und $\cos\vartheta - \cos\alpha = \frac{2k^2(1-k^2)\sin^2\varphi}{1-k^2\sin^2\varphi}$.

Damit geht (27) über in $t_c = \sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\varphi_1}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - \sqrt{\frac{l}{g}}\int_{\varphi_2}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$, wenn ϑ_2 negativ ist. Das dritte Integral ändert sich jedoch nicht, wenn ϑ_2 positiv ist. Es ist daher, ob ϑ positiv oder negativ ist,

$$(31) \quad \ldots \ldots \ldots \quad t_c = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi},$$

Lässt man ϑ_1 innerhalb der Grenzen $\frac{2}{3} > -\cos\vartheta_1 > 0$ zunehmen, so ändern sich auch die Grenzen φ_1 und φ_2. Es ergiebt sich aus (30)

$$(32) \quad \begin{cases} \frac{d\varphi_1}{d\vartheta_1} = -\frac{2 + 3\cos^2\vartheta_1}{(2 - 3\cos\vartheta_1)\sqrt{-2\cos\vartheta_1(1+\cos\vartheta_1)(2+3\cos\vartheta_1)}} \\ \frac{d\varphi_2}{d\vartheta_1} = -\frac{3(2-\cos^2\vartheta)(3-8\cos^2\vartheta_1)}{(2-3\cos\vartheta_1)(1-2\cos\vartheta_1)\sqrt{-2\cos\vartheta_1(1+\cos\vartheta_1)(2+3\cos\vartheta_1)(9-8\cos^2\vartheta_1)}} \end{cases}$$

Mithin findet sich

$$(33) \quad \begin{cases} \frac{dt_c}{d\vartheta_1} = -\sqrt{\frac{l}{g}} \frac{2 + 3\cos^2\vartheta_1}{(4-9\cos^2\vartheta_1)\sqrt{-\cos\vartheta_1}} + \frac{3}{8}\sqrt{\frac{l}{g}} \sin\vartheta_1 \int_0^{\varphi_1} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta^3} \\ -\sqrt{\frac{l}{g}} \frac{3(2-\cos^2\vartheta_1)(3-8\cos^2\vartheta_1)}{(4-9\cos^2\vartheta_1)\sqrt{-\cos\vartheta_1}\sqrt{9-8\cos^2\vartheta_1}} + \frac{3}{8}\sqrt{\frac{l}{g}} \sin\vartheta_1 \int_0^{\varphi_2} \frac{\sin^2\varphi_1\, d\vartheta}{\Delta^3}. \end{cases}$$

Andererseits ist $t_2 = -4\sqrt{\frac{l}{g}} \sin\vartheta_1 \sqrt{-\cos\vartheta_1}$ und

$$\frac{dt_2}{d\vartheta_1} = -\sqrt{\frac{l}{g}} \frac{2 - 6\cos^2\vartheta_1}{\sqrt{-\cos\vartheta_1}}.$$

Für $\vartheta_1 = -\frac{\pi}{2}$, wofür auch $\alpha = -\frac{\pi}{2}$, sind t_c und $t_2 = 0$, und für weiter abnehmende ϑ_1 nehmen beide zu, da sowohl $\frac{dt_c}{d\vartheta_1}$ als $\frac{dt_2}{d\vartheta_1}$ negativ ist. Wäre nun $-\frac{dt_c}{d\vartheta_1} > -\frac{dt_2}{d\vartheta_1}$ in dem Zahlenraum $0 < -\cos\vartheta_1 < \frac{2}{3}$, so wäre auch $t_c > t_2$, selbst wenn $\frac{dt_c}{d\vartheta_1}$ und $\frac{dt_2}{d\vartheta_1}$ positiv werden, selbst wenn also t_c und t_2 aus dem Zustande des Wachsens in den des Abnehmens kämen, da dann t_c langsamer als t_2 abnähme.

Aus (33) ergiebt sich wegen $-\sin\vartheta_1 > 0$ und $\frac{3}{\sqrt{9-8\cos\vartheta_1}} > 1$

$$-\frac{dt_c}{d\vartheta_1} > \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{2 + 3\cos^2\vartheta_1}{(4-9\cos^2\vartheta_1)\sqrt{-\cos\vartheta_1}} + \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{(2-\cos^2\vartheta_1)(3-8\cos^2\vartheta_1)}{(4-9\cos^2\vartheta_1)\sqrt{-\cos\vartheta_1}}.$$

Wäre $\frac{2 + 3\cos^2\vartheta_1}{4 - 9\cos^2\vartheta_1} + \frac{(2-\cos^2\vartheta_1)(3-8\cos^2\vartheta_1)}{4-9\cos^2\vartheta_1} > 2 - 6\cos^2\vartheta_1$, so wäre die Behauptung bewiesen. Diese Annahme bestätigt sich. Denn es ist

$$2 + 3\cos^2\vartheta_1 + (2-\cos^2\vartheta_1)(3-8\cos^2\vartheta_1) > (2 - 6\cos^2\vartheta_1)\, 4 - 9\cos^2\vartheta_1),$$

da $8 - 16\cos^2\vartheta_1 + 8\cos^4\vartheta_1 > 8 - 42\cos^2\vartheta_1 + 54\cos^4\vartheta_1$, so lange $\frac{13}{23} > \cos^2\vartheta_1$, und dieses Verhältnis gilt in dem Zahlenraum $0 < -\cos\vartheta_1 < \frac{2}{3}$.

Es ist somit gezeigt, dass auf jeden Fall

$$t_c > t_2.$$

In der Parabel kommt der materielle Punkt früher in die Peripherie des Kreises, als er zu demselben Kreispunkt auf dem grösseren Wege des Kreises selbst gekommen wäre.

In dem Moment des Eintreffens ist die Geschwindigkeit dieselbe wie die der Kreisbewegung; es tritt aber ein Verlust an lebendiger Kraft ein, sodass sich der materielle Punkt von der

Stelle des Wiedereintreffens langsamer im Kreise fortbewegt, als von der Stelle aus, wenn er sie auf dem Kreise selbst erreicht hätte. Die Bewegung erfolgt, wie sich aus (16) ergiebt, auf dem Kreise mit abnehmenden Polarwinkeln, wenn $-\cos\vartheta_1 \geqq 0{,}56301621$, dagegen mit zunehmenden Polarwinkeln, also rückwärts, wenn $-\cos\vartheta_1 < 0{,}56301621$.

Die Zeit, welche der Punkt auf dem Kreise von der Stelle des Eintreffens bis zur Stelle der zweiten Abweichung in die Parabel zubringt, ist wegen der kleineren Geschwindigkeit eine grössere als bei der nicht unterbrochenen Kreisbewegung. Es könnte daher möglich sein, dass der Zeitverlust $t_c - t_2$, welcher durch die Abweichung in die Parabel hervorgebracht wird, durch den Verlust an Geschwindigkeit beim Eintritt in den Kreis eingeholt würde und also die Zeit, welche der Punkt in der Parabel und dann im Kreis bis zur zweiten Abweichungsstelle gebraucht, dieselbe ist, als wenn der Punkt von einer Abweichungsstelle zur andern auf dem Kreis geblieben wäre. Im allgemeinen findet jedoch diese Ausgleichung nicht statt. Zum Beweis dafür mögen zwei Beispiele dienen, welche zeigen, dass die Bewegung auf dem einen oder auf dem andern Wege mehr Zeit beanspruchen kann.

Es möge die Zeit zwischen dem Eintreffen in dem Kreis und dem zweiten Abweichen aus demselben mit t'_2 bezeichnet werden, die entsprechende zwischen denselben Kreispunkten, wenn die Verbindung mit dem festen Punkt eine starre wäre und keine Abweichung stattfinden könnte, mit t'_c, dann ist, nach (25) gebildet,

$$(34) \quad t'_2 = -\sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\vartheta_2}^{\vartheta_3} \frac{d\vartheta}{\sqrt{-3\cos\vartheta_3 + 2\cos\vartheta}},$$

$$(35) \quad t'_c = -\sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\vartheta_2}^{\vartheta_3} \frac{d\vartheta}{\sqrt{-3\cos\vartheta_1 + 2\cos\vartheta}},$$

während $t_2 = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\sqrt{-\cos\vartheta_1\,(1-\cos^2\vartheta_1)}$ und, wenn $-\cos\vartheta_1 > \frac{2}{3}$,

$$(36) \quad t_c = -\sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\vartheta_1}^{-\pi} \frac{d\vartheta}{\sqrt{-3\cos\vartheta_1 + 2\cos\vartheta}} - \sqrt{\frac{l}{g}} \int_{-\pi}^{\vartheta_2} \frac{d\vartheta}{\sqrt{-3\cos\vartheta_1 + 2\cos\vartheta}},$$

dagegen für $-\cos\vartheta_1 < \frac{2}{3}$, nach (27) gebildet,

$$(37) \quad t_c = -\sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\vartheta_1}^{\alpha} \frac{d\vartheta}{\sqrt{2\,(\cos\vartheta - \cos\alpha)}} + \sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\alpha}^{\vartheta_2} \frac{d\vartheta}{\sqrt{2\,(\cos\vartheta - \cos\alpha)}}.$$

Was nun t'_2 angeht, so fragt es sich, ob $-\cos\vartheta_3 \gtreqless \frac{2}{3}$, ob der I., II. oder III. Fall der im ersten Abschnitt beschriebenen Pendelbewegung für t'_2 vorliegt. Nach (18) ist $-\cos\vartheta_3 = -\cos\vartheta_1 + \frac{64}{3}\cos^3\vartheta_1\,(1-\cos^2\vartheta_1)^3$, es gilt daher zu entscheiden, ob

$$0 \gtreqless 2 + 3\cos\vartheta_1 - [4\cos\vartheta_1 \sin^2\vartheta_1]^3.$$

Positiv ist $f(\cos\vartheta_1) = 2 + 3\cos\vartheta_1 - [4\cos\vartheta_1\,(1-\cos^2\vartheta_1)]^3$, wenn $\cos\vartheta_1 \geqq -\frac{2}{3}$, da die Klammergrösse negativ ist. Der kleinste Wert erscheint mit $\cos\vartheta_1 = -1$ und $\sin\vartheta_1 = 0$, dann ist $f(-1) = -1$. Ist $\cos\vartheta_1 = -0{,}8696747$, so ergiebt sich $f(\cos\vartheta_1) = 0$. Für noch kleinere $\cos\vartheta_1$ ist $f'(\cos\vartheta_1)$ negativ, für grössere positiv, denn $f'(\cos\vartheta_1) = 3 + 12\,[4\cos\vartheta_1 \cdot (1-\cos^2\vartheta_1)]^2\,[3\cos^2\vartheta_1 - 1]$ ist positiv für $\cos^2\vartheta_1 \geqq \frac{1}{3}$, sodass $f(\cos\vartheta_1)$ unausgesetzt zunimmt von $\cos\vartheta_1 = -1$ bis $\cos\vartheta_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, also auch bis $-\frac{2}{3}$, und bis $\cos\vartheta_1 = -0{,}8696747$ negativ

bleibt. Nachdem der materielle Punkt das erste Mal wieder in die Peripherie gelangt ist, bewegt er sich daher nach dem I., II. oder III. Fall der Pendelbewegung, je nachdem

$$\cos\vartheta_1 \gtreqless -0{,}8696747,$$

$$-\vartheta_1 \lessgtr 150^0\,25'\,15'',14.$$

7. Zwei Beispiele.

1) Für das erste Beispiel sei $-\cos\vartheta_1 = 0{,}8696747$ und demnach $-\cos\vartheta_3 = \frac{2}{3}$, $-\vartheta_1 = 150^0\,25'\,15'',14$, $\vartheta_2 = -3\,\vartheta_1 - 2\,\pi = 91^0\,15'\,45'',42$, $-\vartheta_3 = 131^0\,48'\,37'',12$.

Das Beispiel gehört unter den ersten Fall der Pendelbewegung, bei dem ganze Kreisumläufe stattfinden, so lange keine Abweichung eintritt. Der zweiten Abweichung folgt keine dritte, da ϑ_3 in das durch (21) begrenzte Intervall gehört. Man hat

$$t_2 + t'_2 = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\sqrt{-\cos\vartheta_1 \sin^2\vartheta_1} + \sqrt{\frac{l}{g}}\int_{\vartheta_3}^{\vartheta_2}\frac{d\vartheta}{2\cos\frac{\vartheta}{2}}$$

$$= 4\sqrt{\frac{l}{g}}\sqrt{-\cos\vartheta_1 \sin^2\vartheta_1} + \sqrt{\frac{l}{g}}\,\log nat\cdot\frac{\tan\frac{\pi-\vartheta_3}{4}}{\tan\frac{\pi-\vartheta_2}{4}}$$

$$= 1{,}84135094\sqrt{\frac{l}{g}} + 2{,}44152766\sqrt{\frac{l}{g}},$$

ferner

$$t_c + t'_c = \sqrt{\frac{l}{g}}\int_{-\vartheta_1}^{\pi}\frac{d\vartheta}{\sqrt{-3\cos\vartheta_1 + 2\cos\vartheta}} + \sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{-\vartheta_3}\frac{d\vartheta}{\sqrt{-3\cos\vartheta_1 + 2\cos\vartheta}} + \sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi}\frac{d\vartheta}{\sqrt{-3\cos\vartheta_1 + 2\cos\vartheta}}$$

$$= 2\,kK\sqrt{\frac{l}{g}} + k\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\varphi_1}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - k\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\varphi_2}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi},\quad k^2 = \frac{4}{2-3\cos\vartheta_1} = 0{,}86786268,$$

$$\varphi_1 = -\frac{\vartheta_3}{2} = 65^0\,54'\,18'',56,\quad \varphi_2 = -\frac{\vartheta_1}{2} = 75^0\,12'\,37'',57.$$

Es ergiebt sich daher

$$t_c + t'_c = 4{,}243511524\sqrt{\frac{l}{g}},\text{ sodass in diesem Beispiel } t_c + t'_c < t_2 + t'_2 \text{ ist.}$$

2) Für das zweite Beispiel sei $-\cos\vartheta_1 = 0{,}23592788$; $-\cos\alpha = 0{,}35389182$; $\cos\vartheta_3 = 0$.

Nachdem der materielle Punkt die Parabel durchlaufen und den Kreis wieder erreicht hat, geht er in demselben mit negativer Geschwindigkeit, d. i. mit wachsendem Polarwinkel weiter bis zur zweiten Abweichung im positiven Halbkreis, die jedoch an der untern Grenze des oberen Halbkreises stattfindet und unendlich klein ausfällt, sodass der materielle Punkt nur seine Geschwindigkeit umkehrt und auf dem untern Halbkreis weiter pendelt. Bei starrer Verbindung mit dem Centrum würde er bis zum Polarwinkel α steigen, dann innerhalb der Elongationswinkel α und $-\alpha$ Oscillationen ausführen.

Es ergiebt sich, weil $-\cos\vartheta_3 = 0$, mit (34)

$$t_2 + t'_2 = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\sqrt{-\cos\vartheta_1\,(1-\cos^2\vartheta_1)} + \sqrt{\frac{l}{g}}\int_{\vartheta_2}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\vartheta}{\sqrt{2\cos\vartheta}}.$$

Wendet man auf das elliptische Integral die Substitution (28) an, mit den speciellen Werten $\cos\alpha = 0$, $k^2 = \frac{1}{2}$, setzt also $\cos\vartheta = \frac{\frac{1}{2}\sin^2\varphi}{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}$, $\sin^2\varphi = \frac{2\cos\vartheta}{1+\cos\vartheta}$, so erhält man

$$t_2 + t'_2 = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\sqrt{-\cos\vartheta_1\,(1-\cos^2\vartheta_1)} + \sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\varphi_2}\frac{d\vartheta}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}},\quad \varphi_2 = 62^0\,50'\,48'',90,$$

woraus die Rechnung ergiebt

$$t_2 + t'_2 = 3{,}09386954\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Dann ist

$$t_c + t'_c = \sqrt{\frac{l}{g}}\int_\alpha^{\vartheta_1}\frac{d\vartheta}{\sqrt{2\,(\cos\vartheta-\cos\alpha)}} + \sqrt{\frac{l}{g}}\int_\alpha^{\vartheta_2}\frac{d\vartheta}{\sqrt{2\,(\cos\vartheta-\cos\alpha)}} + \sqrt{\frac{l}{g}}\int_{\vartheta_2}^{\vartheta_3}\frac{d\vartheta}{\sqrt{2\,(\cos\vartheta-\cos\alpha)}}$$

$$= \sqrt{\frac{l}{g}}\int_\alpha^{\vartheta_1}\frac{d\vartheta}{\sqrt{2\,(\cos\vartheta-\cos\alpha)}} + 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_\alpha^{0}\frac{d\vartheta}{\sqrt{2\,(\cos\vartheta-\cos\alpha)}} - \sqrt{\frac{l}{g}}\int_\alpha^{-\frac{\pi}{2}}\frac{d\vartheta}{\sqrt{2\,(\cos\vartheta-\cos\alpha)}}$$

und mit der Substitution (28)

$$t_c + t'_c = 2\,K\sqrt{\frac{l}{g}} + \sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\varphi_1}\frac{d\varphi}{\Delta} - \sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\varphi_2}\frac{d\varphi}{\Delta},$$

$k^2 = 0{,}67694592$; $\varphi_1 = 28^0\,31'\,34'',85$; $\varphi_2 = 46^0\,18'\,19'',76$, sodass

$$t_c + t_c = 3{,}72611100\sqrt{\frac{l}{g}} > t_2 + t'_2.$$

II. Teil.

Erfolgt der Anstoss des schweren Punktes nicht in der durch den festen Punkt gehenden vertikalen Ebene, so bewegt sich derselbe ebenfalls in einer Parabel, bis seine Entfernung vom festen Punkt gleich der Länge des Fadens ist, aber die darauf folgende Bewegung auf der Kugelfläche ist nicht die des einfachen, sondern die des sphärischen Pendels. Auch hierbei kann die Kugelfläche in einer Parabel verlassen werden.

I. Bewegung des Punktes auf der Kugeloberfläche. Sphärisches Pendel.

Es sei das dem I. Teil zu Grunde gelegte rechtwinklige Koordinatensystem in der Anfangs-Vertikalebene durch Hinzufügung der horizontalen y-Axe erweitert und das Polarkoordinatensystem durch den Winkel φ, den die Meridianebene des materiellen Punktes mit der xz-Ebene bildet; dann ist

$$(1)\quad \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} x = l\sin\vartheta\cos\varphi \\ y = l\sin\vartheta\sin\varphi \\ z = l\cos\vartheta. \end{cases}$$

Die Spannung des Fadens zwingt den Punkt auf der Kugeloberfläche zu bleiben. Ist die Beschleunigung des Zwanges $= N$, so sind die Bewegungsgleichungen des Punktes

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -N\frac{x}{l} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -N\frac{y}{l} \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -N\frac{z}{l} + g \end{aligned} \right.$$

Das Prinzip der lebendigen Kraft giebt das erste Integral:

$$(3) \quad \frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = gz - gz_0 = gl\cos\vartheta - gl\cos\vartheta_0,$$

worin v_0, z_0, ϑ_0 für den Anfang der Bewegung auf der Kugel gelten.

Ferner gilt in der xy-Ebene das Prinzip der Flächen und liefert das Integral

$$(4) \quad x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = x_0\left(\frac{dy}{dt}\right)_0,$$

wobei $y_0 = 0$ genommen ist. Da nun

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= l\cos\vartheta\cos\varphi\frac{d\vartheta}{dt} - l\sin\vartheta\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}, \\ \frac{dy}{dt} &= l\cos\vartheta\sin\varphi\frac{d\vartheta}{dt} + l\sin\vartheta\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}, \\ \frac{dz}{dt} &= -l\sin\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}, \end{aligned}$$

so ergiebt sich aus (4)

$$(5) \quad \sin^2\vartheta\frac{d\varphi}{dt} = \sin^2\vartheta_0\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0$$

und aus (3), da $v^2 = l^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + l^2\sin^2\vartheta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$,

$$l^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + l\sin^2\vartheta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = l^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)_0^2 + l^2\sin^2\vartheta_0\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0^2 + 2gl\cos\vartheta - 2gl\cos\vartheta_0,$$

daher wegen (5)

$$(6) \quad l\frac{d\vartheta}{dt} = \pm\frac{\sqrt{2gl}\sqrt{f(\cos\vartheta)}}{\sin\vartheta},$$

wobei das negative Vorzeichen für abnehmende ϑ zu nehmen ist und der Radikand $f(\cos\vartheta)$ folgenden Wert hat:

$$(7) \quad f(\cos\vartheta) = \left[\frac{l}{2g}\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)_0^2 + \frac{l}{2g}\sin^2\vartheta_0\cos^2\vartheta_0\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0^2 - \cos\vartheta_0\right] + \cos\vartheta$$
$$- \left[\frac{l}{2g}\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)_0^2 + \frac{l}{2g}\sin^2\vartheta_0\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0^2 - \cos\vartheta_0\right].\cos^2\vartheta - \cos^3\vartheta$$

Da $f(-1) = -\frac{l}{2g}\sin^4\vartheta_0\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$, $f(\cos\vartheta_0) = \frac{l}{2g}\sin^2\vartheta_0\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)_0^2$, $f(+1) = f(-1)$ ist, also $f(-1) < 0$, $f(\cos\vartheta_0) > 0$, $f(1) < 0$, so hat die Gleichung $f(\cos\vartheta) = 0$ zwischen $\cos\vartheta = \pm 1$ zwei reelle Wurzeln; die dritte reelle Wurzel liegt noch unter -1, da $f(-\infty)$ positiv ist, ihr entspricht kein Winkel ϑ. Der kleineren Wurzel zwischen -1 und $\cos\vartheta_0$ kommt ein grösserer Winkel α zu, der grösseren Wurzel zwischen $\cos\vartheta_0$ und 1 ein kleinerer Winkel β. Für $\vartheta = \alpha$ und β ist nach (6) $\frac{d\vartheta}{dt} = 0$; für $\vartheta = \alpha$ hört die Zunahme von ϑ, für $\vartheta = \beta$ die Abnahme auf, mit $\vartheta = \alpha$ erreicht somit der materielle Punkt seine höchste, mit $\vartheta = \beta$ seine tiefste Lage.

Der Radikand lässt auch die Entscheidung zu, ob der höchste und der tiefste Punkt auf der oberen oder der unteren Halbkugel liegen; es hängt vom Vorzeichen von $f(0)$, dem absoluten Gliede des Radikanden $f(\cos\vartheta)$, ab, wie folgt:

Die dritte Wurzel sei γ, sodass

(8) . . . . . $f(\cos\vartheta) = (\cos\beta - \cos\vartheta)(\cos\vartheta - \cos\alpha)(\cos\vartheta - \gamma)$.

Man hat daher, wenn man die Koëfficienten von $\cos\vartheta$ in (7) und (8) vergleicht,

$$-(\cos\alpha + \cos\beta)\gamma - \cos\alpha\cos\beta = 1,$$

und somit

(9) . . . . . $\gamma = -\dfrac{1 + \cos\alpha \cdot \cos\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}$.

Da $\gamma < -1$ und $1 + \gamma < 0$, also $-\dfrac{(1 - \cos\alpha)(1 - \cos\beta)}{\cos\alpha + \cos\beta} < 0$ sein muss, so kann $\cos\alpha + \cos\beta$ nicht negativ, $\cos\beta$ muss daher jedenfalls positiv sein. Aus (8) folgt ferner

(10) . . . . . $f(0) = \gamma\cos\alpha\cos\beta$.

Haben $\cos\alpha$ und $\cos\beta$ entgegengesetzte Vorzeichen, sodass $\cos\beta > 0 > \cos\alpha$, so ist $f(0)$ positiv; ein negatives $f(0)$ dagegen bedingt $\cos\beta > \cos\alpha > 0$: Die tiefste Lage des materiellen Punktes befindet sich jedenfalls auf der unteren Halbkugel; die höchste befindet sich auf der oberen, wenn $f(0)$ positiv, dagegen auf der unteren, wenn $f(0)$ negativ ist.

Dasselbe Resultat ergiebt sich aus (6) für reelle und imaginäre $\dfrac{d\vartheta}{dt}$, wenn $\vartheta = \dfrac{\pi}{2}$ gesetzt wird.

Da $\cos\alpha + \cos\beta > 0$, also $\cos\beta > -\cos\alpha$, so steigt der materielle Punkt nicht ebenso hoch in die obere Halbkugel hinauf, als er in die untere hinabsinkt. Ist $\cos\beta = 1$, also $\beta = 0$, so ist $\gamma = -1$ und $f(0) = -\cos\alpha$; aber auch der Koëfficient von $\cos^2\vartheta$ in (8) ist $\cos\alpha = -f(0)$ was nach (7) nur möglich ist, wenn $\left(\dfrac{d\varphi}{dt}\right)_0 = 0$ oder $\sin\vartheta_0 = 0$, und nach (5) eine Drehung um die z-Axe ausschliesst. Der tiefste Punkt der Kugel wird also nur von dem ebenen Pendel durchlaufen.

Rechnet man die Zeit von dem höchsten Punkt an, der auf der Kugelfläche erreicht wird, bis zu einer beliebigen Lage, so erhält man aus (6)

(11). . . . . $t = \sqrt{\dfrac{l}{2g}}\int_\vartheta^\alpha \dfrac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{\sqrt{f(\cos\vartheta)}}$.

Es ist $\sin^4\vartheta_0\left(\dfrac{d\varphi}{dt}\right)_0^2 = -\dfrac{2g}{l}f(-1) = -\dfrac{2g}{l}(1 + \cos\beta)(1 + \cos\alpha)(1 + \gamma) = \dfrac{2g}{l}\dfrac{\sin^2\alpha\sin^2\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}$,

sodass sich aus (5) und (6) ergiebt

(12) . $\varphi = \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{2\sqrt{\cos\alpha + \cos\beta}}\int_\vartheta^\alpha \dfrac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{(1 + \cos\vartheta)\sqrt{f(\cos\vartheta)}} + \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{2\sqrt{\cos\alpha + \cos\beta}}\int_\vartheta^\alpha \dfrac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{(1 - \cos\vartheta)\sqrt{f(\cos\vartheta)}}$.

Die Reduktion der elliptischen Integrale (11) und (12) sei hier im Anschluss an Durège, Theorie der elliptischen Funktionen, in Kürze durchgeführt. Bei der Reduktion thut die Substitution

(13) . . . . . $\cos\vartheta = \dfrac{\cos\alpha - \gamma k^2\sin^2\sigma}{1 - k^2\sin^2\sigma}$, $k^2 = \dfrac{\cos\beta - \cos\alpha}{\cos\beta - \gamma}$

gute Dienste. Man erhält

(14) . . . . . $t = \sqrt{\dfrac{l}{g}}\sqrt{\dfrac{2}{\cos\beta - \cos\alpha}}\int_0^\sigma \dfrac{d\sigma}{\Delta}$, $\sin^2\sigma = \dfrac{1}{k^2}\cdot\dfrac{\cos\vartheta - \cos\alpha}{\cos\vartheta - \gamma}$.

Hat der materielle Punkt die tiefste Lage erreicht, so ist $\vartheta = \beta$, $\sin^2\sigma = 1$, also $\sigma = \dfrac{\pi}{2}$, sodass er von der höchsten bis zur tiefsten Lage die Zeit

(15) . . . . . $T = \sqrt{\frac{l}{g}} \sqrt{\frac{2\,k^2}{\cos\beta - \cos\alpha}} \cdot K$

gebraucht. Somit ist

(16) . . . . . $t = \frac{T}{K} \int_0^\sigma \frac{d\sigma}{\Delta}, \quad \sigma = am \frac{Kt}{T} = amu,$

ferner

$$\sin^2\sigma = \sin^2 am \frac{Kt}{T} = \sin^2 am \frac{K(t + 2T)}{T}.$$

$\cos\vartheta$ nimmt daher nach Verlauf der Zeit $2T$ immer denselben Wert an, und der bewegliche Punkt befindet sich, wenn die Zeit von dem höchsten Punkt an gerechnet wird, zu den Zeiten

$$0,\ 2T,\ 4T,\ 6T \ldots.$$

in den höchsten Lagen, zu den Zeiten

$$T,\ 3T,\ 5T \ldots..$$

in den tiefsten Lagen. Da aber

$$\sin^2 am \frac{K(t - T)}{T} = \sin^2 am \frac{K(t + T)}{T},$$

so nimmt $\cos\vartheta$ beim Aufsteigen zwischen zwei extremen Lagen in umgekehrter Reihenfolge dieselben Werte an, wie beim Herabsinken.

Die höchsten, wie die tiefsten Lagen bleiben indessen nicht an derselben Stelle, sondern sie verschieben sich auf zwei horizontalen Kreisen, und zwar stetig um einen und denselben Winkel Φ, wie die Diskussion des Winkels φ lehrt:

Setzt man

(17) . . . . . $\begin{cases} h_1 = \frac{(1 - \cos\alpha)(1 - \cos\beta)k^2}{(1 + \cos\alpha)(\cos\alpha + \cos\beta)} = -\frac{(1 + \gamma)k^2}{1 + \cos\alpha} \\ h_2 = -\frac{(1 + \cos\alpha)(1 + \cos\beta)k^2}{(1 - \cos\alpha)(\cos\alpha + \cos\beta)} = -\frac{(1 - \gamma)k^2}{1 - \cos\alpha}, \end{cases}$

so geht (12) über in

(18) . $\varphi = \frac{k \sin\alpha \sin\beta}{\sqrt{\cos^2\beta - \cos^2\alpha}} \left\{ \frac{1}{1 + \cos\alpha} \int_0^\sigma \frac{\Delta\, d\sigma}{1 + h_1 \sin^2\sigma} + \frac{1}{1 - \cos\alpha} \int_0^\sigma \frac{\Delta\, d\sigma}{1 + h_2 \sin^2\sigma} \right\}.$

Beide Integrale lassen sich auf ein elliptisches Integral erster und ein solches dritter Gattung zurückführen. Es ist nämlich

$$\int_0^\sigma \frac{1 - k^2 \sin^2\sigma}{1 + h_1 \sin^2\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{\Delta} = \int_0^\sigma \frac{d\sigma}{\Delta} - (h_1 + k^2) \int_0^\sigma \frac{\sin^2\sigma\, d\sigma}{(1 + h_1 \sin^2\sigma)\Delta} = u - (h_1 + k^2) \int_0^u \frac{\sin^2 amu\, du}{1 + h_1 \sin^2 amu}.$$

Um auf die Jakobische Normalform

$$\Pi(u, c) = \int_0^u \frac{k^2 \sin^2 amc \cos amc\, \Delta\, amc \sin^2 amu\, du}{1 - k^2 \sin^2 amc \sin^2 amu}$$

zu kommen, setzt man

$$h_1 = -k^2 \sin^2 amc,$$

woraus sich jedoch, da h_1 positiv ist, $\sin amc$ als rein imaginär erweist. Es ist

$$c = \int_0^{i\sqrt{h_1 : k^2}} \frac{d\xi}{\sqrt{(1 - \xi^2)(1 - k^2\xi^2)}},$$

und mit der Substitution

$$\xi = \frac{i\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}}, \quad \eta = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \quad \text{erhält man}$$

$$c = i \int_0^{\sqrt{\frac{h_1}{h_1+k^2}}} \frac{d\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)\,(1-k'^2\,\eta^2)}} = ia, \quad \text{wenn}$$

(19) . . . . . $a = \int_0^{\alpha_1} \frac{d\sigma}{\sqrt{1-k'^2\,sin^2\sigma}}$, $sin^2\alpha_1 = \frac{h_1}{h_1+k^2}$

gesetzt wird. Daher hat man

$$\int_0^{\sigma} \frac{\Delta\, d\sigma}{1+h_1\,sin^2\sigma} = u - \frac{h_1+k^2}{k^2} \cdot \frac{\Pi(u,c)}{sin\,amc\,cos\,amc\,\Delta\,amc},$$

$$sin\,amc = i\sqrt{h_1:k^2},\ cos\,amc = \sqrt{\frac{h_1+k^2}{k^2}},\ \Delta\,amc = \sqrt{1+h_1},$$

$$-\frac{h_1+k^2}{k^2} \cdot \frac{1}{sin\,amc \cdot cos\,amc\,\Delta\,amc} = i\sqrt{\frac{h_1+k^2}{h_1\,(1+h_1)}} = i\frac{(1+cos\,\alpha)\sqrt{cos^2\beta - cos^2\alpha}}{k\,sin\,\alpha\,sin\,\beta}.$$

Man erhält daher als ersten Teil von (18)

$$\frac{k\,sin\,\alpha\,sin\,\beta}{\sqrt{cos^2\beta - cos^2\alpha}} \cdot \frac{1}{1+cos\,\alpha} \int_0^{\sigma} \frac{\Delta\,\sigma\,d\sigma}{1+h_1\,sin^2\sigma} = \frac{k\,sin\,\alpha\,sin\,\beta}{\sqrt{cos^2\beta - cos^2\alpha}} \frac{u}{1+cos\,\alpha} + i\,\Pi(u\,ia)$$

Bei dem zweiten Integral in (18)

$$\int_0^{\sigma} \frac{\Delta\, d\sigma}{1+h_2\,sin^2\sigma} = u - (h_2+k^2) \int_0^{u} \frac{sin^2amu\,du}{1+h_2\,sin^2amu} = u - \frac{(h_2+k^2)}{k^2} \cdot \frac{\Pi(u,c)}{sin\,amc\,cos\,amc\,\Delta\,amc}$$

ist $h_2 = -k^2\,sin^2amc$, aber $-h_2 > k^2$. Daher führt der geradlinige Integrationsweg in dem Integral

$$c = \int_0^{\sqrt{-h_2:k^2}} \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)\,(1-k^2\,\xi^2)}},$$

zu dem Verzweigungspunkt $\xi = 1$. Umgeht man diesen Punkt in einem kleinen Halbkreis, so lässt sich zeigen, dass der auf den Halbkreis bezogene Teil des Integrals zugleich mit dessen kleiner und kleiner genommenem Radius r verschwindet. c nämlich lässt sich zerlegen in

$$c = \int_0^{1-r} \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)\,(1-k^2\,\xi^2)}} + \int_{1-r}^{1+r} \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)\,(1-k^2\,\xi^2)}} - i\int_{1+r}^{\sqrt{-h_2:k^2}} \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi^2-1)\,(1-k^2\,\xi^2)}}.$$

Das mittelste Integral geht mit der Substitution $\xi = 1 - r \cdot e^{i\psi}$ über in

$$-i\sqrt{r}\int_0^{\pi} \frac{e^{1/2\,i\psi}\,d\psi}{\sqrt{(2-r\,e^{i\psi})\,[1-k^2\,(1-r\,e^{i\psi})^2]}}$$

und verschwindet für $r = 0$.

Ferner ist $h_2 + 1 = \frac{(cos\,\alpha - \gamma)\,(1-cos\,\beta)}{(cos\,\beta - \gamma)\,(1-cos\,\alpha)} > 0$, folglich $1 - k^2\,\xi^2$ in dem dritten Integral bis zu der oberen Grenze $\sqrt{-h_2:k^2}$ positiv, wenn nur $1 + r < \sqrt{-h_2:k^2}$ ist. Das dritte Integral verwandelt sich durch die Substitution $\xi = \frac{1}{\sqrt{1-k'^2\,sin^2\sigma}}$, $sin\,\sigma = \frac{\sqrt{\xi^2-1}}{k^1\,\xi}$ in das Integral

(20) . . . . . $b = \int_0^{\beta_1} \frac{d\sigma}{\sqrt{1-k'^2\,sin^2\sigma}}$, $sin^2\beta_1 = \frac{1+\frac{k^2}{h_2}}{1-k^2}$,

worin $\frac{1+\frac{k^2}{h_2}}{1-k^2} < 1$, da $-h_2 < 1$. Es ist somit für verschwindend kleine r

(21) . . . . . $c = K - ib.$

und

$$\Pi(u, c) = \Pi(u, K - ib) = -\Pi(u, K + ib),$$

ferner

$$sin\ amc = sin\ am\ (K - ib) = \frac{1}{\Delta\ am\ (b_1\ k^1)} = \sqrt{\frac{-h_2}{k^2}},\ cos\ amc = \sqrt{\frac{h_2 + k^2}{k^2}},\ \Delta\ amc = \sqrt{1 + h_2},$$

$$\frac{h_2 + k^2}{k^2\ sin\ amc\ cos\ amc\ \Delta\ amc} = \sqrt{\frac{h_2 + k^2}{-h_2\,(1 + h_2)}} = i\frac{(1 - cos\ \alpha)\sqrt{cos^2\beta - cos^2\alpha}}{k\ sin\ \alpha\ sin\ \beta},$$

folglich ergiebt sich für den 2. Teil von (18)

$$\frac{k\ sin\ \alpha\ sin\ \beta}{\sqrt{cos^2\beta - cos^2\alpha}} \cdot \frac{1}{1 - cos\ \alpha}\int_0^\sigma \frac{\Delta\, d\sigma}{1 + h^2\ sin^2\sigma} = \frac{k\ sin\ \alpha\ sin\ \beta}{\sqrt{cos^2\beta - cos^2\alpha}} \cdot \frac{u}{1 - cos\ \alpha} + i\ \Pi(u, K + ib).$$

Die Summe der beiden Teile ergiebt

$$(22)\ \ldots\ \varphi = \frac{2\ k\ sin\ \beta}{sin\ \alpha\ \sqrt{cos^2\beta - cos^2\alpha}} \cdot u + i\ \Pi(u, ia) + i\ \Pi(u, K + ib).$$

Nun lässt sich die Funktion Π auf die Funktion Z und die Jakobische Funktion Θ zurückführen durch die Gleichung

$$\Pi(u, a) = u\ Z(a) + \frac{1}{2}\ log.\ nat.\ \left\{\frac{\Theta(u - a)}{\Theta(u + a)}\right\},$$

die selbst für komplexe Variable Gültigkeit besitzt. Hierbei ist

$$Z(a) = \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)},\ q = e^{-\frac{\pi K'}{K}},$$

$$\Theta(u) = 1 - 2\,q\ cos\ \frac{\pi u}{K} + 2\,q^4\ cos\ \frac{2\,\pi u}{K} - 2\,q^9\ cos\ \frac{3\,\pi u}{K} + \ldots,$$

sodass

$$i\ \Pi(u, ia) = u\left\{Z(a, k') + \frac{\pi a}{2\,KK'} - tan\ am\,(a, k')\ \Delta\ am\ (a, k')\right\} + \frac{i}{2}\,l\left\{\frac{\Theta(u - ia)}{\Theta(u + ia)}\right\},$$

$$i\ \Pi(u, K + ib) = u\left\{Z(b, k') + \frac{\pi b}{2\,KK'} - \frac{k'^2\ sin\ am\ (b, k')\ cos\ am\ (b, k')}{\Delta\ am\ (b, k')}\right\} + \frac{i}{2}\,l\left\{\frac{\Theta(u - K - ib)}{\Theta(u - K + ib)}\right\}.$$

Ferner ergeben sich folgende Werte:

$$sin\ am\ a = \sqrt{\frac{h_1}{h_1 + k^2}} = \frac{k}{k'}\sqrt{\frac{(1 - cos\ \alpha)\ (1 - cos\ \beta)}{cos^2\beta - cos^2\alpha}},$$

$$cos\ am\ a = \sqrt{\frac{k^2}{h_1 + k^2}} = \frac{k}{k'}\sqrt{\frac{1 + cos\ \alpha}{cos\ \beta - cos\ \alpha}},$$

$$\Delta\ am\ (a, k') = \sqrt{\frac{k^2(1 + h_1)}{h_1 + k^2}} = k\sqrt{\frac{1 + cos\ \beta}{cos\ \beta - cos\ \alpha}};$$

$$sin\ am\ b = \frac{1}{k'}\sqrt{\frac{h_2 + k^2}{h_2}} = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{cos^2\beta - cos^2\alpha}{(1 + cos\ \alpha)\,(1 + cos\ \beta)}}$$

$$cos\ am\ b = \frac{1}{k'}\sqrt{\frac{k^2(1 + h_2)}{-h_2}} = \sqrt{\frac{(1 - cos\ \beta)\,(cos\ \alpha + cos\ \beta)}{(1 + cos\ \alpha)\,(1 + cos\ \alpha)}}$$

$$\Delta\ am\ (b, k') = \sqrt{\frac{k^2}{-h_2}} = \sqrt{\frac{(1 - cos\ \alpha)\ (cos\ \alpha + cos\ \beta)}{(1 + cos\ \alpha)\ (1 + cos\ \beta)}}.$$

Mit diesen erhält man aus (22)

$$\varphi = u\left\{Z(a, k') + Z(b, k') + \frac{\pi(a + b)}{2\,KK'} + \frac{k\ sin\ \alpha\ sin\ \beta\,(cos\ \alpha + cos\ \beta)}{(1 + cos\ \alpha)\,(1 + cos\ \beta)\sqrt{cos^2\beta - cos^2\alpha}}\right\} + \frac{i}{2}\,l\left\{\frac{\Theta(u - ia)\,\Theta(u - K - ib)}{\Theta(u + ia)\,\Theta(u - K + ib)}\right\}.$$

Dieser Ausdruck gestaltet sich etwas einfacher mit der Formel

$$Z(a, k') + Z(b, k') = Z(a + b, k') + k'^2 \, sim\, ama \, sin\, amb \, sin\, am\,(a + b).$$

Da nun

$$k'^2 \, sin\, ama \, sin\, amb \, sin\, am\,(a + b) = \frac{k \, sin\,\alpha \, sin\,\beta\,(1 + cos\,\alpha \, cos\,\beta)}{(1 + cos\,\alpha)(1 + cos\,\beta)\sqrt{cos^2\beta - cos^2\alpha}},$$

so gewinnt man

$$\varphi = u\left\{ Z(a + b, k') + \frac{\pi(a+b)}{2KK'} + \frac{k \, sin\,\alpha \, sin\,\beta}{\sqrt{cos^2\beta - cos^2\alpha}} \right\} + \frac{i}{2} log.\, nat. \left\{ \frac{\Theta(u - ia)\,\Theta(u - K - ib)}{\Theta(u + ia)\,\Theta(u - K + ib)} \right\},$$

und setzt man

$$(23) \quad \Phi = Z(a + b, k') + \frac{\pi}{2}\frac{a + b}{KK'} + \frac{k \, sin\,\alpha \, sin\,\beta}{\sqrt{cos^2\beta - cos^2\alpha}},$$

so ist

$$(24) \quad \varphi = \frac{\Phi \cdot t}{T} + \frac{i}{2} log.\, nat. \left\{ \frac{\Theta(u - ia)\,\Theta(u - K - ib)}{\Theta(u + ia)\,\Theta(u - K + ib)} \right\}.$$

Der Winkel φ besteht daher aus zwei Teilen; der eine wächst proportional der Zeit, der andere ist periodisch. Da nämlich $\Theta(u) = \Theta(u + 2K)$ ist, so nimmt der Logarithmus nach Verlauf von $2T$ Zeiteinheiten periodisch denselben Wert an; im besonderen gilt dies zu den Zeitpunkten $0{,}2T, 4T, \ldots$, wenn 0 die Zeit der ersten höchsten Lage bedeutet, und ebenso zu den Zeitpunkten $T, 3T, 5T, \ldots$. Die beiden in den zwei Reihen periodisch wiederkehrenden Werte des Logarithmus sind jedoch einander gleich; denn für $u = 0$, wie für $u = K$ ist er gleich 0, da $\Theta(u) = \Theta(-u)$ und $\Theta(K - ic) = \Theta(K + ic)$.

Es entsprechen sich daher folgende Werte:

$$t = 0, T, 2T, 3T, 4T, \ldots.$$
$$\vartheta = \alpha, \beta, \alpha, \beta, \alpha, \ldots.$$
$$\varphi = 0, \Phi, 2\Phi, 3\Phi, 4\Phi, \ldots.$$

Die höchsten und tiefsten Lagen des beweglichen Punktes verschieben sich also stetig um den Winkel Φ im Sinne der Bewegungsrichtung auf einem horizontalen Kreise.

Schreibt man statt (12)

$$\varphi = sin\,\alpha \, sin\,\beta \int_{\vartheta}^{\alpha} \frac{d\vartheta}{sin\,\vartheta\,\sqrt{(cos\,\beta - cos\,\vartheta)(cos\,\vartheta - cos\,\alpha)\,[cos\,\vartheta\,(cos\,\alpha + cos\,\beta) + 1 + cos\,\alpha \, cos\,\beta]}},$$

so sieht man leicht, dass φ um so grösser ist, je grösser β, je höher die tiefsten Lagen des materiellen Punktes sich befinden. Dasselbe gilt vom Winkel Φ, der also am kleinsten ist, wenn $cos\,\beta = 1$. Dann ist $\gamma = -1$, $sin^2\alpha_1 = 0$, $sin^2\beta_1 = 1$, also $a = 0$, $b = K'$ und $\frac{a + b}{K'} = 1$, $Z(a + b, k') = 0$, sodass $\frac{\pi}{2}$ der kleinste Wert von Φ ist und $\Phi > \frac{\pi}{2}$.

2. Die Spannung des Fadens.

Die Spannung der Fadens und die Schwerkraft erteilen zusammen dem materiellen Punkt eine Beschleunigung, die in eine Tangentialbeschleunigung $\frac{dv}{dt}$ und eine Centripetalbeschleunigung $\frac{v^2}{\varrho}$ in der Richtung des Krümmungsradius ϱ zerlegt werden kann. Da der Krümmungskreis einer sphärischen Kurve auf der Kugel selbst liegt (Satz von Meusnier), also der Kosinus des Winkels, den der Faden mit dem Krümmungshalbmesser bildet, $= \frac{\varrho}{l}$ ist, so hat die Komponente der Centri-

petalbeschleunigung $\frac{v^2}{\varrho}$ in der Richtung des Fadens den Wert $\frac{v^2}{l}$. Diese Komponente aber macht mit der Komponente $g \cos \vartheta$ der Schwere die Spannung N des Fadens (Beschleunigung des Zwanges) aus, sodass sich

$$N = \frac{v^2}{l} + g \cos \vartheta$$

ergiebt. N kann demnach nur in der oberen Halbkugel, für negative $\cos \vartheta$, negativ werden Mit (3) erhält man

(25) . . . . . $N = \frac{v^2_0 - 2\,gl \cos \vartheta_0 + 3\,gl \cos \vartheta}{l}$,

einen Ausdruck, der von φ unabhängig ist. Er stimmt mit dem Ausdruck (6) des I. Teiles für die Spannung des ebenen Pendels völlig überein und liefert wie jener die Bedingungen, unter denen der materielle Punkt die Oberfläche verlassen und sich in einer Parabel weiterbewegen kann.

$v^2_0 - 2\,gl \cos \vartheta_0$ ist wegen (3) positiv, wenn der materielle Punkt sich bis in die obere Halbkugel bewegen soll. Zweitens muss $-\cos \vartheta > \frac{v^2_0 - 2\,gl \cos \vartheta_0}{3\,gl}$ für negative N sein und drittens selbstverständlich $\vartheta < \alpha$. Es bestehen somit die Bedingungen

(26) . . . . . $0 < v^2_0 - 2\,gl \cos \vartheta_0 < -3\,gl \cos \alpha$.

Sie sagen aus, dass der materielle Punkt im Momente des Abweichens in eine Parabel einen auf das Intervall

$$\frac{\pi}{2} < \vartheta_1 < \alpha$$

beschränkten Polarwinkel ϑ_1 besitzt.

Nur im Aufsteigen kann der Punkt die Kugelfläche verlassen; denn erreicht derselbe die höchste Lage, ohne dass N null und negativ wird, so bleibt N auch bei der fallenden Bewegung positiv.

3. Ort der Abweichung in die Parabel.

Hat der Punkt beim Aufsteigen einen Polarwinkel ϑ_1 in der oberen Halbkugel erreicht, sodass

(27) . . . . . $-\cos \vartheta_1 = \frac{v^2_0 - 2\,gl \cos \vartheta_0}{3\,gl} < -\cos \alpha$,

so bewegt er sich in einer Parabel weiter, da N bei noch grösserem Polarwinkel negativ wird.

Seine Geschwindigkeit hat alsdann den Wert

(28) . . . . . $v_1 = \sqrt{v^2_0 - 2\,gl \cos \vartheta_0 + 2\,gl \cos \vartheta_1} = \sqrt{-gl \cos \vartheta_1}$.

Für die Zeit bis zur Abweichung, wenn sie von der ersten höchsten Lage an gemessen wird, erhält man

(29) . . . . . $t_1 = 2\,T - \frac{T}{K}\int_0^{\sigma_1} \frac{d\sigma}{\Delta}$, $\sin^2 \sigma_1 = \frac{1}{k^2}\frac{\cos \vartheta_1 - \cos \alpha}{\cos \vartheta_1 - \gamma}$

und für den Drehungswinkel der Vertikalebene

(30) . . . . . $\varphi_1 = \frac{\Phi \cdot t_1}{T} + \frac{i}{2}\, log.\, nat. \left\{\frac{\Theta\,(u_1 - ia) \cdot \Theta\,(u_1 - K - ib)}{\Theta\,(u_1 + ia) \cdot \Theta\,(u_1 - K + ib)}\right\}$,

wobei $u_1 = 2\,K - \int_0^{\sigma_1} \frac{d\sigma}{\Delta}$ gesetzt ist.

Es wäre noch die reelle Form von

$$\frac{i}{2}\,log.\,nat.\left\{\frac{\Theta(u-ia)\cdot\Theta(u-K-ib)}{\Theta(u+ia)\cdot\Theta(u-K+ib)}\right\}=$$

$$\frac{i}{2}\,log.\,nat.\left\{\frac{\Theta(u-ia)}{\Theta(u+ia)}\right\}+\frac{i}{2}\,log.\,nat.\left\{\frac{\Theta(u-K-ib)}{\Theta(u-K+ib)}\right\}$$

zu ermitteln. Man hat

$$\frac{\Theta(u-ia)}{\Theta(u+ia)}=\frac{1-2\,q\,cos\frac{\pi(u-ia)}{K}+2\,q^4\,cos\frac{2\pi(u-ia)}{K}-2\,q^9\,cos\frac{3\pi(u-ia)}{K}+\ldots}{1-2\,q\,cos\frac{\pi(u+ia)}{K}+2\,q^4\,cos\frac{2\pi(u+ia)}{K}-2\,q^9\,cos\frac{3\pi(u+ia)}{K}+\ldots}.$$

Da aber

$$cos\frac{m\pi(u\pm ia)}{K}=\frac{e^{\frac{m\pi a}{K}}+e^{-\frac{m\pi a}{K}}}{2}\,cos\frac{m\pi u}{K}\mp i\,\frac{e^{\frac{m\pi a}{K}}-e^{-\frac{m\pi a}{K}}}{2}\,sin\frac{m\pi u}{K},$$

so folgt

$$\frac{i}{2}\,log.\left\{\frac{\Theta(u-ia)}{\Theta(u+ia)}\right\}=\frac{i}{2}\,lg\left\{\frac{U-iU_1}{U+iU_1}\right\}=arc\,tan\frac{U_1}{U},\ \text{wenn}$$

$$(31)\ .\quad\begin{cases}U=1-q(e^{\frac{\pi a}{K}}+e^{-\frac{\pi a}{K}})\,cos\frac{\pi u}{K}+q^4(e^{\frac{2\pi a}{K}}+e^{-\frac{2\pi a}{K}})\,cos\frac{2\pi u}{K}-q^9(e^{\frac{3\pi a}{K}}+e^{-\frac{3\pi a}{K}})\,cos\frac{3\pi u}{K}+\ldots\\ U_1=q(e^{\frac{\pi a}{K}}-e^{-\frac{\pi a}{K}})\,sin\frac{\pi u}{K}-q^4(e^{\frac{2\pi a}{K}}-e^{-\frac{2\pi a}{K}})\,sin\frac{2\pi u}{K}+q^9(e^{\frac{3\pi a}{K}}-e^{-\frac{3\pi a}{K}})\,sin\frac{3\pi u}{K}-\ldots\end{cases}$$

Nach (19) ist $a=\int_0^{\alpha_1}\frac{d\sigma}{\sqrt{1-k'^2sin^2\sigma}}$, also $a<K'$ und $e^{\frac{\pi a}{K}}<e^{\frac{\pi K'}{K}}$, daher $q\cdot e^{\frac{\pi a}{K}}=e^{-\frac{\pi K'}{K}}\cdot e^{\frac{\pi a}{K}}<1$,

sodass $q\,e^{\frac{\pi a}{K}}, q^4e^{\frac{2\pi a}{K}}, q^9e^{\frac{3\pi a}{K}}\ldots$ und $q\,e^{-\frac{\pi a}{K}}, q^4e^{-\frac{2\pi a}{K}}, q^9e^{-\frac{3\pi a}{K}}\ldots$ und demnach auch die Koëfficienten der Kosinus und Sinus in beiden Reihen (31) und diese selbst rasch abnehmende Reihen bilden.

Es ist ebenso

$$\frac{i}{2}\,log.\,nat.\left\{\frac{\Theta(u-K-ib)}{\Theta(u-K+ib)}\right\}=-arc\,tan\frac{V_1}{V},$$

wenn

$$(32)\begin{cases}V=1-q(e^{\frac{\pi b}{K}}+e^{-\frac{\pi b}{K}})\,cos\frac{\pi(K-u)}{K}+q^4(e^{\frac{2\pi b}{K}}+e^{-\frac{2\pi b}{K}})\,cos\frac{2\pi(K-u)}{K}-q^9(e^{\frac{3\pi b}{K}}+e^{-\frac{3\pi b}{K}})\,cos\frac{3\pi(K-u)}{K}+\ldots.\\ V_1=q(e^{\frac{\pi b}{K}}-e^{-\frac{\pi b}{K}})\,sin\frac{\pi(K-u)}{K}-q^4(e^{\frac{2\pi b}{K}}-e^{-\frac{2\pi b}{K}})\,sin\frac{2\pi(K-u)}{K}+q^9(e^{\frac{3\pi b}{K}}-e^{-\frac{3\pi b}{K}})\,sin\frac{3\pi(K-u)}{K}-\ldots.\end{cases}$$

Auch diese Reihen konvergieren rasch, da

$b=\int_0^{\beta_1}\frac{d\sigma}{\Delta(\sigma,k')}<K'$. Daher kann man für (17) setzen

$$(33)\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\quad\varphi=\frac{\Phi\cdot t}{T}+arc\,tan\frac{U_1}{U}-arc\,tan\frac{V_1}{V},$$

womit auch φ_1 durch $t=t_1$, $u=u_1=2K-\int_0^{\sigma_1}\frac{d\sigma}{\Delta}$ und daher der Ort des Abweichens in die Parabel bestimmt ist.

4. Specielle Fälle.

Um ein bestimmtes Beispiel durchzuführen, müsste man für die drei Konstanten ϑ_0, $\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)_0$, $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0$ bestimmte Werte wählen oder statt derselben für die Konstanten α, β, ϑ_1. Die drei Konstanten sind jedoch nicht von einander unabhängig, weil $-\cos\vartheta_1 < -\cos\alpha < \cos\beta$ sein muss. Vergleicht man die Koëfficienten von $\cos^2\vartheta$ in (7) und (8), so erhält man $\frac{l}{2g}\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)_0^2 + \frac{l}{2g}\sin^2\vartheta_0\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0^2 - \cos\vartheta_0$, d. i. $\frac{v_0^2 - 2gl\cos\vartheta_0}{2gl} = -\gamma - \cos\alpha - \cos\beta$, und da $\frac{v_0^2 - 2gl\cos\vartheta_0}{3gl} = -\cos\vartheta_1$ und $-\gamma - \cos\alpha - \cos\beta = -\cos\alpha + \frac{1-\cos^2\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}$, so ist

(34) . . . . . $-\cos\vartheta_1 = -\frac{2}{3}\cos\alpha + \frac{2}{3}\frac{1-\cos^2\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}$.

Da ferner $-\cos\vartheta_1 < -\cos\alpha$ ist, so gilt

(35). . . . . $-\frac{2}{3}\cos\alpha < -\cos\vartheta_1 < -\cos\alpha$.

Aus (34) folgt

$$\frac{2}{3}\frac{1-\cos^2\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = -\cos\vartheta_1 + \frac{2}{3}\cos\alpha < -\frac{1}{3}\cos\alpha.$$

Daraus ergiebt sich

$$(\cos\alpha + \frac{1}{2}\cos\beta)^2 < \frac{9}{4}(\cos^2\beta - \frac{8}{9}),$$

sodass, soll eine Abweichung möglich sein,

(36) . . . . . $\cos^2\beta > \frac{8}{9}$, $\cos\beta > 0{,}9428090$

und

$$\frac{3}{2}\sqrt{\cos^2\beta - \frac{8}{9}} > \cos\alpha + \frac{1}{2}\cos\beta > -\frac{3}{2}\sqrt{\cos^2\beta - \frac{8}{9}},$$

folglich

(37) . . . . . $\frac{\cos\beta - \sqrt{9\cos^2\beta - 8}}{2} < -\cos\alpha < \frac{\cos\beta + \sqrt{9\cos^2\beta - 8}}{2}$

sein muss.

1) Ist $-\cos\alpha = \frac{1}{2}\cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{3} = -\cos\vartheta_1$, so erreicht der materielle Punkt seine höchste Lage, ohne die Kugelfläche zu verlassen; daher gilt

(37)*. . $\frac{\cos\beta - \sqrt{9\cos^2\beta - 8}}{2} < -\cos\alpha < \frac{\sqrt{2}}{3}$ oder $\frac{\sqrt{2}}{3} < -\cos\alpha < \frac{\cos\beta + \sqrt{9\cos^2\beta - 8}}{2}$.

2) $\cos\beta = 1$ ist die Bedingung für das ebene Pendel. Hierbei ist $-\cos\vartheta_1 = -\frac{2}{3}\cos\alpha$.

3) Soll $\cos\alpha = \cos\beta$ sein, so bleibt der materielle Punkt auf der untern Halbkugel, da nur diese die beiden extremen Lagen enthalten kann. Eine Abweichung aus der Oberfläche ist ausgeschlossen. Dabei ist ϑ konstant, gleich α, und die Bewegung findet daher auf einem horizontalen Kugelkreis statt, dessen Radius $l\sin\alpha$ ist. Die Geschwindigkeit ist ebenfalls konstant, sie ist gleich v_0, wie das Prinzip der lebendigen Kraft lehrt. Da $\frac{d\vartheta}{dt} = 0$, so ist $v_0 = l\sin\alpha\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0$.

Ferner ist nach (5)

$$\frac{d\varphi}{dt} = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0 = \frac{v_0}{l \sin \alpha}$$

und daher

$$\varphi = \frac{v_0}{l \sin \alpha} \cdot t,$$

wenn $\varphi_0 = 0$ genommen ist. Für den ganzen Umfang ergiebt sich

$$T = \frac{2\, l\, \pi \,.\, \sin \alpha}{v_0}.$$

Nun ist

$$\frac{l}{2g}\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)_0^2 + \frac{l}{2g} \sin^2\vartheta_0 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0^2 - \cos \vartheta_0 = \frac{1 + \cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} - \cos \alpha - \cos \beta$$

und für $\cos \vartheta_0 = \cos \alpha = \cos \beta$

$$\frac{l}{2g} \sin^2\alpha \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0^2 = \frac{\sin^2\alpha}{2 \cos \alpha},$$

sodass

$$\frac{v_0}{l \sin \alpha} = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0 = \sqrt{\frac{g}{l \cos \alpha}}.$$

Daher ergiebt sich

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos \alpha}{g}}.$$

Bei kleinen Elongationswinkeln ist bekanntlich die Oscillationsdauer eines einfachen Pendels mit der Länge l annähernd $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$; die Umlaufszeit des konischen Pendels ist daher gleich der Oscillationsdauer eines einfachen Pendels mit kleiner Elongation, dessen Länge gleich dem Abstand $l \cos \alpha$ der Ebene der Bahn von dem festen Punkte ist.

4) Es sei $\cos \beta = 0{,}95$, $\cos \alpha = -0{,}4$, welche Werte den Bedingungen (36) und (37) genügen; dann folgt aus (34) $\cos \vartheta_1 = -\frac{127}{330}$, und es stellen sich folgende Werte ein:

$$k^2 = 0{,}64989059, \quad \sigma_1 = 10^0\ 12'\ 25''\ 71, \quad K = 2{,}00746187, \quad K' = 1{,}74442000,$$

$$u_1 = 2K - \int_0^{\sigma_1} \frac{d\sigma}{\Delta} = 3{,}83616132, \quad \alpha_1 = 24^0\ 43'\ 45'', 12, \quad \beta_1 = 81^0\ 10'\ 52'', 06,$$

$$a = \int_0^{\alpha_1} \frac{d\sigma}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2\sigma}} = 0{,}43625670, \quad b = \int_0^{\beta_1} \frac{d\sigma}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2\sigma}} = 1{,}55384622.$$

$$q = e^{\frac{-\pi K'}{K}} = 0{,}06522298, \quad q' = e^{\frac{-\pi K}{K'}} = 0{,}02690844, \quad \frac{\pi(a+b)}{K'} = 205^0\ 21'\ 3'', 90,$$

$$\frac{\pi(a+b)}{2KK'} = 0{,}89268257, \quad \frac{\pi a}{K'} = 0{,}68272324, \quad \frac{\pi b}{K'} = 2{,}43170342, \quad e^{\frac{\pi a}{K}} = 1{,}9792607,$$

$$e^{\frac{\pi b}{K}} = 11{,}378249, \quad e^{\frac{-\pi a}{K}} = 0{,}5052392, \quad e^{\frac{-\pi b}{K}} = 0{,}0878870$$

$$Z(a+b, k') = \frac{2\pi}{K'}\left\{\frac{q'}{1-q'^2} \sin\frac{\pi(a+b)}{K'} + \frac{q'^2}{1-q'^2} \sin\frac{2\pi(a+b)}{K'} + \frac{q'^3}{1-q'^6} \sin\frac{3\pi(a+b)}{K'} + \ldots\right\}$$
$$= -0{,}039581952.$$

$$\frac{k \sin \alpha \sin \beta}{\sqrt{\cos^2\beta - \cos^2\alpha}} = 0{,}26774003, \quad \Phi' = 2{,}25004487.$$

$$\frac{\pi u_1}{K} = 343^0\ 58'\ 16'',29.$$

$$U_1 = -\ 0{,}02650867, \quad U = 0{,}84431348$$
$$V_1 = 0{,}20457645, \quad V = 1{,}72076678,$$
$$arctan\frac{U_1}{U} = -\ 1^0\ 47'\ 53'',91, \quad arctan\frac{V_1}{V} = 6^0\ 46'\ 47''\ 60.$$

Man erhält somit als zusammengehörige Werte

$$\alpha = 113^0\ 34'\ 41'',43; \quad \beta = 18^0\ 11'\ 41'',59; \quad \vartheta_1 = 112^0\ 38'\ 3'',60.$$

$$T = 1{,}96976997\sqrt{\frac{l}{g}}, \quad t_1 = 3.76413396\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

$$\Phi = 128^0\ 58'\ 50'',73, \quad \varphi_1 = 237^0\ 52'\ 24'',53.$$

5. Bewegung in der Parabel.

Die Ebene der eintretenden Parabelbewegung ist eine vertikale Ebene, durch die Richtung der Geschwindigkeit v_1 gelegt. Die Bewegungsgleichungen in derselben sind

(38) . . . . . $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = g.$

Aus den beiden ersten erhält man

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}\right)_1 \text{ und } \frac{dy}{dt} = \left(\frac{dy}{dt}\right)_1,$$

wenn die speciellen Werte bei der Abweichung durch den Index 1 ausgezeichnet werden; aus der dritten, wenn die Zeit vom Beginn der Bewegung in der Parabel gezählt wird,

$$\frac{dz}{dt} = \left(\frac{dz}{dt}\right)_1 + gt;$$

mithin für die Geschwindigkeit, für welche $v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$, erhält man

(39) . . . . . $v^2 = v_1^2 + 2g \cdot \left(\frac{dz}{dt}\right)_1 \cdot t + g^2 t^2.$

Bei weiterer Integration stellen sich folgende Gleichungen der Parabel ein:

(40) . . . . . $\begin{cases} x = x_1 + \left(\frac{dx}{dt}\right)_1 \cdot t \\ y = y_1 + \left(\frac{dy}{dt}\right)_1 \cdot t \\ z = z_1 + \left(\frac{dz}{dt}\right)_1 \cdot t + \frac{1}{2} gt^2. \end{cases}$

Die Zeit, welche während der Parabelbewegung bis zum Eintreffen in der Kugelfläche verfliesst, sei t_2, die Koordinaten seien beim Eintreffen x_2, y_2, z_2. Man erhält dann mit (40)

$$l^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = l^2 + 2\left[x_1\left(\frac{dx}{dt}\right)_1 + y_1\left(\frac{dy}{dt}\right)_1 + z_1\left(\frac{dz}{dt}\right)_1\right] \cdot t_2 + \left[v_1^2 + gz_1\right] t_2^2 + g\left(\frac{dz}{dt}\right)_1 t_2^3 + \frac{g^2}{4} t_2^4.$$

Der Koëfficient von t_2 ist gleich null, sowie wegen (28) der von t_2^2.

Es bleibt daher

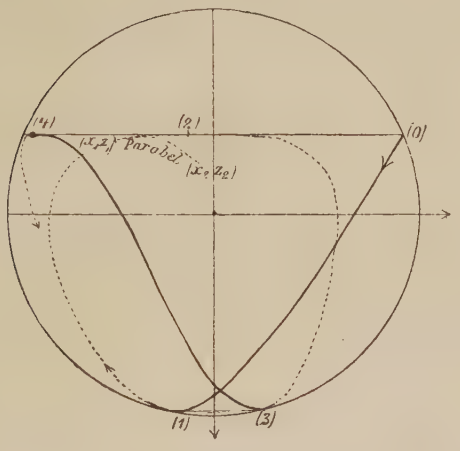
$$g \cdot t_2^3 \left[\left(\frac{dz}{dt}\right)_1 + \frac{1}{4} gt_2\right] - 0,$$

woraus für die Zeit der Parabelbewegung

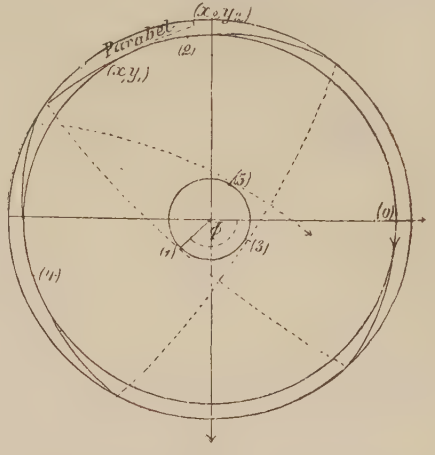
$$(41) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad t_2 = \frac{-4\left(\frac{dz}{dt}\right)_1}{g} = +\frac{4l}{g} \sin \vartheta_1 \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)_1 = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\sqrt{2f(\cos \vartheta_1)}$$

resultiert.

xz-Ebene.



xy-Ebene.



(0), (2), (4) . . . . höchste Punkte der Bahn, $\cos \alpha = -0{,}4$.
(1), (3) . . . . tiefste Punkte der Bahn, $\cos \beta = 0{,}95$.
$x_1 = -0{,}38484848 \cdot l$, $x_1 = -0{,}49083198 \cdot l$, $y_1 = -0{,}78164918 \cdot l$.
$x_2 = -0{,}26472438 \cdot l$, $x_2 = -0{,}11710110 \cdot l$, $y_2 = -0{,}95718758 \cdot l$.

6. Weitere Abweichungen.

Nach (39) und (41) kommt der Geschwindigkeit beim Eintreffen in der Kugeloberfläche der Wert

$$v_{\prime\prime} = \sqrt{v_1^2 + 8\left(\frac{dz}{dt}\right)_1^2}$$

zu.

Der Punkt könnte, wenn er auf dem Wege der Parabel im Punkte x_2, y_2, z_2 in die Kugeloberfläche gelangt, gerade die Bahn treffen, die er einhalten würde, wenn er die Kugeloberfläche nicht verliesse. Aber gesetzt auch, es wäre der Fall, so wäre es für den weiteren Verlauf der Bewegung doch ohne Bedeutung, da der Punkt, wenn er auch die Bewegungskurve auf der Kugel wirklich trifft, dieselbe nicht beibehält, indem die Richtung seiner Geschwindigkeit eine andere ist. Um dies zu beweisen, möge zunächst angenommen werden, dass der Punkt auf der Kugeloberfläche bleibt und jene Stelle des Eintreffens erreicht. Nach (3) geht daselbst die Geschwindigkeit in eine solche über, für die

$$v = \sqrt{3v_1^2 + 2gz_2} = \sqrt{3v_1^2 + 2gl\cos\vartheta_1 + 2g\left(\frac{dz}{dt}\right)_1 t_2 + g^2 t_2^2} = \sqrt{v_1^2 + 8\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}.$$

Die Ausdrücke für die beiden Geschwindigkeiten stimmen überein, wie überhaupt in Punkten der Parabel und der Kugelfläche, welche gleiche Höhe, d. h. gleiche z, haben, indem für gleiche z in beiden Kurven die Geschwindigkeit denselben Wert

$$v = \sqrt{3v_1^2 + 2gz}$$

erlangt. Beim Übergang aus der Parabel in die Kugelfläche verliert jedoch der Punkt einen Teil der Geschwindigkeit, die Komponente in der Richtung des Fadens, wegen der Spannung desselben, sodass die Geschwindigkeit der nun eintretenden Pendelbewegung in allen Punkten eine kleinere ist, als die der ersten Pendelbewegung vor der Abweichung. Zur Bestimmung der neuen Geschwindigkeit und der verlorenen Komponente sei der Winkel mit ψ bezeichnet, den die Tangente der Parabel im Punkte x_2, y_2, z_2 mit dem Radius bildet. Die Gleichungen der Tangente sind

$$\frac{\xi - x_2}{\left(\frac{dx}{dt}\right)_{,,}} = \frac{\eta - y_2}{\left(\frac{dy}{dt}\right)_{,,}} = \frac{\zeta - z_2}{\left(\frac{dz}{dt}\right)_{,,}},$$

die des Radius

$$\frac{\xi}{x_2} = \frac{\eta}{y_2} = \frac{\zeta}{z_2},$$

sodass

$$\cos\psi = \frac{x_2\left(\frac{dx}{dt}\right)_{,,} + y_2\left(\frac{dy}{dt}\right)_{,,} + z_2\left(\frac{dz}{dt}\right)_{,,}}{l\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)_{,,}^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)_{,,}^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)_{,,}^2}}.$$

Nun gilt nach (40) und (27) und weil

$$x_1\left(\frac{dx}{dt}\right)_1 + y_1\left(\frac{dy}{dt}\right)_1 + z_1\left(\frac{dz}{dt}\right)_1 = 0 \text{ ist,}$$

für das Quadrat des Radiusvektor in der Parabel

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2 + g\left(\frac{dz}{dt}\right)_1 t^3 + \frac{g^2}{4}t^4,$$

daher ist

$$x\left(\frac{dx}{dt}\right) + y\left(\frac{dy}{dt}\right) + z\left(\frac{dz}{dt}\right) = \frac{3}{2}g\left(\frac{dz}{dt}\right)_1 \cdot t^2 + \frac{g^2}{2}t^3$$

und

$$x_2\left(\frac{dx}{dt}\right)_{,,} + y_2\left(\frac{dy}{dt}\right)_{,,} + z_2\left(\frac{dz}{dt}\right)_{,,} = \frac{3}{2}g\left(\frac{dz}{dt}\right)_1 t^2{}_2 + \frac{g^2}{2}t^3{}_2 = -\frac{8}{g}\cdot\left(\frac{dz}{dt}\right)_1^3,$$

folglich

$$\cos\psi = \frac{-8\left(\frac{dz}{dt}\right)_1^3}{gl\sqrt{v_1^2 + 8\left(\frac{dz}{dt}\right)_1^2}}. \tag{42}$$

Die verlorene Komponente ergiebt sich hieraus als

$$v_{,,}\cos\psi = -8\left(\frac{dz}{dt}\right)_1^3 : gl. \tag{43}$$

Zerlegt man die Geschwindigkeit $v_{,,}$ sowohl als die verlorne Komponente in drei Komponenten in den Richtungen der Axen, so erhält man als Komponenten der Geschwindigkeit $v_2 = v_{,,}\sin\psi$ beim Beginn der neuen Pendelbewegung

$$\begin{cases} \left(\frac{dx}{dt}\right)_2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)_{,,} - v_{,,}\cos\psi\cdot\frac{x_2}{l} \\ \left(\frac{dy}{dt}\right)_2 = \left(\frac{dy}{dt}\right)_{,,} - v_{,,}\cos\psi\cdot\frac{y_2}{l} \\ \left(\frac{dz}{dt}\right)_2 = \left(\frac{dz}{dt}\right)_{,,} - v_{,,}\cos\psi\cdot\frac{z_2}{l}. \end{cases} \tag{44}$$

Als Summe ihrer Quadrate ergiebt sich in der That $v_{,,}^2 - 2\, v_{,,} \cos\psi \cdot v_{,,} \cos\psi + v_{,,}^2 \cos^2\psi = v_{,,}^2 \sin^2\psi$. Die Kosinus der Winkel, die die Geschwindigkeit $v_2 = v_{,,} \sin\psi$, d. i. die Anfangsgeschwindigkeit der neuen Pendelbewegung, mit den Axen bildet, erhält man durch Division der Komponenten $\left(\frac{dx}{dt}\right)_2, \left(\frac{dy}{dt}\right)_2, \left(\frac{dz}{dt}\right)_2$ mit $v_{,,} \sin\psi$. Soll nun die Richtung der neuen Geschwindigkeit dieselbe sein, wie wenn der Punkt auf der Kugel selbst an die Stelle des Eintreffens gelangt wäre, so müssten jene Kosinus mit den Kosinus der alten Pendelbewegung an dieser Stelle übereinstimmen. Z. B. müssten die Kosinus der Winkel, welche beide Richtungen mit der z-Axe bilden, gleich sein, also

$$\frac{\left(\frac{dz}{dt}\right)_{,,} - v_{,,} \cos\psi \cdot \frac{z_1}{l}}{v_{,,} \sin\psi} = \frac{-l \sin\vartheta_2 \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)_2}{v_{,,}}.$$

Da $\left(\frac{dz}{dt}\right)_{,,} = \left(\frac{dz}{dt}\right)_1 + g t_2 = -3\left(\frac{dz}{dt}\right)_1$, so erhält man aus (6)

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)_{,,} = 3\sqrt{2\, gl\, f(\cos\vartheta_1)},$$

$$z_2 = z_1 + \frac{4}{g}\left(\frac{dz}{dt}\right)_1^2 = l\cos\vartheta_1 + 8\, lf(\cos\vartheta_1),$$

$$v_{,,} \cos\psi = -8\left(\frac{dz}{dt}\right)_1^3 : gl = 16\, f(\cos\vartheta_1)\sqrt{2\, gl\, f(\cos\vartheta_1)},$$

$$v_{,,}^2 = v_1^2 + 8\left(\frac{dz}{dt}\right)_1^2 = -gl\cos\vartheta_1 + 16\, gl\, f(\cos\vartheta_1) \text{ und folglich}$$

$\sin\psi = \sqrt{\frac{-\cos\vartheta_1 + 16 f_1 - 8^3 f_1^3}{-\cos\vartheta_1 + 16 f_1}}$, worin zur Abkürzung $f(\cos\vartheta_1) = f_1$ gesetzt ist.

Ferner hat man wegen (6)

$$-l \sin\vartheta_2 \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)_2 = \sqrt{2\, gl\, f(\cos\vartheta_2)},$$

sodass die Gleichung

$$\frac{[3 - 16 f_1 \cdot (\cos\vartheta_1 + 8 f_1)]\sqrt{f_1}\sqrt{-\cos\vartheta_1 + 16 f_1}}{\sqrt{-\cos\vartheta_1 + 16 f_1 - 8^3 f_1^3}} = \sqrt{f_2}$$

statthaben müsste.

$\cos\vartheta_2 = z_2 : l$ erhält man aus (40) für $t_2 = 4\sqrt{\frac{2\, lf_1}{g}}$, nämlich $\cos\vartheta_2 = \cos\vartheta_1 + 8 f_1$, f_2 aus (7), nämlich es ist

$$f(\cos\vartheta) = f_0 + \cos\vartheta + (\cos\alpha + \cos\beta + \gamma)\cos^2\vartheta - \cos^3\vartheta = f_0 + \cos\vartheta + \frac{3}{2}\cos\vartheta_1 \cos^2\vartheta - \cos^3\vartheta,$$

woraus folgt

$$f_1 = f_0 + \cos\vartheta_1 + \frac{1}{2}\cos^3\vartheta_1$$

und daher

$$f_2 = f_0 + \cos\vartheta_1 + 8 f_1 + \frac{1}{2}\cos^3\vartheta_1 - 96 f_1^2 \cos\vartheta_1 - 8^3 f_1^3$$

$$= (9 - 96 f_1 \cdot \cos\vartheta_1 - 8^3 f_1^2) \cdot f_1.$$

Obige Bedingungsgleichung geht somit über in

$$[3 - 16 f_1 \cdot \cos\vartheta_1 - 128 f_1^2] \cdot \sqrt{-\cos\vartheta_1 + 16 f_1} = \sqrt{9 - 96 f_1 \cdot \cos\vartheta_1 - 8^3 f_1^2} \cdot \sqrt{-\cos\vartheta_1 + 16 f_1 - 8^3 f_1^3},$$

welche Gleichung nach gehöriger Reduktion liefert

$$f_1^2\left[f_1 + \frac{1}{2}\cos\vartheta_1 - \frac{1}{2}\cos^3\vartheta_1\right] = 0.$$

Sollen die Winkel, welche die beiden Bewegungsrichtungen mit der z-Axe bilden, übereinstimmen, so muss demnach entweder $f_1 = 0$, also $\cos\vartheta_1 = \cos\alpha$ sein, d. h. es findet keine Abweichung statt; oder es muss die Gleichung

$$f_1 + \frac{1}{2}\cos\vartheta_1 - \frac{1}{2}\cos^3\vartheta_1 = 0.$$

bestehen. Man erhält aus (7)

$$f_0 = -\frac{3}{2}\cos\vartheta_1 - \frac{l}{2g}\sin^4\vartheta_0\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0^2,$$

da der Koëfficient von $\cos^2\vartheta$ gleich $-\frac{3}{2}\cos\vartheta_1$ ist. Demnach ergiebt sich

$$f_1 = -\frac{1}{2}\cos\vartheta_1 + \frac{1}{2}\cos^3\vartheta_1 - \frac{l}{2g}\sin^4\vartheta_0\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0^2.$$

Wenn die Winkel gleich sein sollen, so muss daher, wenn nicht $f_1 = 0$ ist,

$$\sin^2\vartheta_0 \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0 = 0$$

sein, also das Drehungsmoment $\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)$ um die z-Axe nach (5) verschwinden, was nur beim einfachen, ebenen Pendel eintritt. Es ist daher bewiesen, dass der materielle Punkt beim sphärischen Fadenpendel, nachdem er die Kugeloberfläche verlassen und dieselbe in einer Parabel wieder erreicht hat, nicht in die alte Bahn der Pendelbewegung einlenkt.

Da beim Eintreffen ein Verlust an lebendiger Kraft stattfindet, so sieht man ein, dass nach einer endlichen Anzahl von Abweichungen die lebendige Kraft nicht mehr hinreicht, den materiellen Punkt in die obere Halbkugel zu heben und dass daher keine Abweichungen mehr erfolgen können, vorausgesetzt, dass der Verlust an lebendiger Kraft nicht verschwindend klein ausfällt. Die verlorene Komponente der Geschwindigkeit ist

$$v_{,,}\cos\psi = -\frac{8}{gl}\cdot\left(\frac{dz}{dt}\right)_1^3 = 16\, f_1\sqrt{2\, glf_1},$$

der Verlust ist demnach um so kleiner, je kleiner $-\left(\frac{dz}{dt}\right)_1$, d. h. je näher die Abweichung bei der höchsten Lage stattfindet, welche der materielle Punkt auf der Kugel selbst erreichen würde. Es ist nämlich $-\left(\frac{dz}{dt}\right)_1 = \sqrt{2\, glf_1}$ um so kleiner, je kleiner f_1 ist. Aber man hat

$$\frac{df(\cos\vartheta)}{d\cos\vartheta} = f'(\cos\vartheta) = 1 + 3\cos\vartheta\,(\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta)$$

und daher $f'(\cos\vartheta_1) = 1$, $f'(\pm\infty) = -\infty$. Ferner ist nach (35) $-\cos\vartheta_1 > -\frac{2}{3}\cos\alpha$, also $-3\cos\alpha\,(\cos\vartheta_1 - \cos\alpha) < \cos^2\alpha$ und folglich

$$f'(\cos\alpha) = 1 + 3\cos\alpha\,(\cos\vartheta_1 - \cos\alpha) > 0.$$

Somit ist $f'(\cos\vartheta)$ positiv von $\cos\vartheta = \cos\alpha$ bis $\cos\vartheta_1$, und $f(\cos\vartheta)$ nimmt zu von $\cos\alpha$ bis $\cos\vartheta_1$. Daraus geht hervor, dass $f(\cos\vartheta_1)$ und $-\left(\frac{dz}{dt}\right)_1$ um so kleiner sind, je weniger

$\cos \vartheta_1$ von $\cos \alpha$ verschieden ist, dass aber $-\left(\frac{dz}{dt}\right)_1$ und daher der Verlust an Geschwindigkeit um so grösser ausfällt, je näher die Abweichung an der xy-Ebene erfolgt. Je höher der Ort der ersten Abweichung ist, um so mehr nachfolgende giebt es. Bei $\vartheta_1 = \alpha$ findet keine Abweichung statt, der Parabelbogen ist gleich null, die Bewegung geht auf der Kugel ununterbrochen weiter.

Schlussbemerkung.

Im 5. Abschnitt des I. Teils ist noch zu bemerken, dass der Punkt auch nach mehreren Abweichungen in den Raum (22) und dann in den Raum (20) gelangen kann; ferner im 6. Abschnitt des I. und II. Teils, dass die Übereinstimmung der Geschwindigkeiten eine Folge des Satzes von der lebendigen Kraft ist.

Vita.

August Ludwig Hossfeld, geboren zu Meiningen am 5. März 1851, Sohn des Ökonomierats Hossfeld zu Kranichfeld a/Ilm, evangelischer Konfession, erhielt seine wissenschaftliche Vorbildung auf der Realschule I. Ordnung zu Meiningen. Er studierte von Ostern 1870 bis 1873 in Jena Mathematik und Naturwissenschaften und unterbrach seine Studien ein Jahr durch die Teilnahme am deutsch-französischen Krieg; von Ostern 1873 bis Michaelis 1874 studierte er in Halle a/S. In Jena hörte er Vorlesungen bei den Herren Professoren Snell, Abbe, Schäffer, Geuther, Endemacher, Gaedechens, in Halle bei den Herren Heine, Heym, Knoblauch, Thomae, Brauns, Asmus. Im letzten Studienjahr nahm er an den Übungen des mathematischen Seminars unter Leitung des Herrn Professor Heine teil. Nachdem er im Juni 1875 das Examen pro facultate docendi in Halle a/S. bestanden hatte, leistete er das Probejahr an dem Stiftsgymnasium in Merseburg ab und war vom Herbst 1876 bis Ostern 1879 als Hilfslehrer am Gymnasium zu Eisleben und bis Herbst 1879 an dem Realprogymnasium zu Hofgeismar angestellt. Seit der Zeit versieht er an letzterer Anstalt die Stelle eines ordentlichen Lehrers.